

۱. با کدامیک از تغییر متغیرهای زیر معادله دیفرانسیل  $(x+y+4)dx - (x-y-6)dy = 0$  به یک معادله همگن تبدیل می شود؟

الف.  $u = x+1$  و  $v = y-5$

ب.  $u = x-1$  و  $v = y+5$

ج.  $u = x-1$  و  $v = y-5$

د.  $u = x+1$  و  $v = y+5$

۲. کدامیک از گزینه های زیر در مورد معادله دیفرانسیل  $y dx + [x + yx^3(1 + \ln y)] dy = 0$  صحیح است؟

الف. کامل است.

ب. دارای عامل انتگرال ساز بر حسب  $x$  می باشد.

ج. دارای عامل انتگرال ساز بر حسب  $y$  می باشد.

د. دارای عامل انتگرال ساز بر حسب  $xy$  می باشد.

۳. به ازای کدام مقادیر  $m$  و  $n$  تابع  $\rho(x, y) = x^m y^n$  می تواند یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل

$$(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

الف.  $m = -1, n = 2$

ب.  $m = 1, n = 2$

ج.  $m = 1, n = -2$

د.  $m = -1, n = -2$

۴. معادله دیفرانسیل  $y' = x^3 + \frac{p}{x}y - \frac{1}{x}y^2$  با تغییر متغیر  $y = -x^p + \frac{1}{u}$  به کدام معادله تبدیل می شود؟

الف.  $u' + \left(\frac{p}{x} + 2x\right)u = \frac{1}{x}$

ب.  $u' - \left(\frac{p}{x^p} + 2x^p\right)u = \frac{1}{x^p}$

ج.  $u' + \left(\frac{p}{x} - 2x\right)u = \frac{-1}{x}$

د.  $u' + \left(\frac{p}{x^p} - 2x^p\right)u = \frac{-1}{x^p}$

۵. مسیرهای متعامد بر خانواده ۱- پارامتری منحنی های  $y = Cx^5$  کدام است؟

الف. خانواده ۱- پارامتری هذلولیهای  $x^p - 5y^p = k$

ب. خانواده ۱- پارامتری هذلولیهای  $y^p - 5x^p = k$

ج. خانواده ۱- پارامتری بیضیهای  $x^p + 5y^p = k$

د. خانواده ۱- پارامتری بیضیهای  $5x^p + y^p = k$

۶. کدامیک از مجموعه توابع زیر وابسته خطی هستند؟

الف. توابع  $e^x, e^{-x}, e^{px}$

ب. توابع  $e^x, xe^x, x^p e^x$

ج. توابع  $e^x \sin x, e^x \cos x$

د. توابع  $x+1, x+2, x+3$

۷. کدامیک از معادلات دیفرانسیلی زیر با ضرایب ثابت، با کمترین مرتبه ممکن، دارای جوابی به فرم  $xe^{px}$  می باشد؟

الف.  $y'' - 4y' + 4y = 0$

ب.  $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

ج.  $y'' + 4y' + 4y = 0$

د.  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

۸. فرم جواب خصوصی کدامیک از معادلات زیر صحیح نیست؟

الف. معادله  $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$  دارای جواب خصوصی به فرم  $x^2(A_0 + A_1x)e^{-2x}$  می باشد.

ب. معادله  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 2x$  دارای جواب خصوصی به فرم  $x(A_0 \cos 2x + A_1 \sin 2x)e^{-3x}$  می باشد.

ج. معادله  $y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$  دارای جواب خصوصی به فرم  $x^3(A_0 + A_1x)e^{-x}$  می باشد.

د. معادله  $y'' - 2y' + y = 3e^x$  دارای جواب خصوصی به فرم  $x^2(A_0 + A_1x)e^x$  می باشد.

۹. می دانیم که  $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه  $\frac{1}{2}$  و

$$y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

در فاصله  $(0, +\infty)$  است. جواب عمومی آن کدام است؟

الف.  $y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}$  ب.  $y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$

ج.  $y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  د.  $y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$

۱۰. نقاط منفرد منظم معادله دیفرانسیل لژاندر  $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$  کدام است؟  
 الف.  $x=0$  ب.  $x=\pm 1$  ج.  $x=-1$  د.  $x=1$

۱۱. ریشه های معادله شاخص معادله دیفرانسیل  $9x^2y'' + 9(x^2+x)y' + (2x-1)y = 0$  در همسایگی  $x=0$  کدام است؟

الف.  $s = \pm \frac{1}{3}$  ب.  $s=0$  ج. ریشه ندارد د.  $s = \pm \frac{1}{2}$

۱۲. کدامیک از گزینه های زیر در مورد جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل لاگر  $xy'' + (1-x)y' + py = 0$

که در آن  $p$  ثابت و  $x > 0$ ، صحیح است؟

الف. تنها یک جواب به فرم سری فر نیبوسی دارد.

ب. دو جواب به فرم سری فر نیبوسی دارد.

ج. یک جواب به فرم سری فر نیبوسی و یک جواب به فرم لگاریتمی دارد.

د. جواب ندارد.

۱۳. در معادله دیفرانسیل  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  با تغییر متغیر  $x = \frac{1}{t}$  به کدام معادله می‌رسیم؟

الف.  $y'' + \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right)\right) y' + \frac{1}{t^2} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$

ب.  $y'' + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right)\right) y' + \frac{1}{t^2} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$

ج.  $y'' + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right) p\left(\frac{1}{t}\right) y' + \frac{1}{t^2} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$

د.  $y'' + \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right) p(t) y' + \frac{1}{t^2} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$

۱۴. مقدار  $\int_0^{+\infty} e^{-s^3} ds$  برابر است با:

د.  $\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

ج.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

ب.  $\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

الف.  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

۱۵. می‌دانیم که  $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$  ,  $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$  جوابهای معادله بسل از مرتبه  $\frac{1}{2}$  می‌باشد، با

توجه به رابطه  $\frac{2\alpha}{x} J_{\alpha} = J_{\alpha-1} + J_{\alpha+1}$  مقدار  $\tan x$  برابر است با:

ب.  $\tan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}$

الف.  $\tan x = \frac{1}{\frac{2}{x} - \frac{1}{\frac{4}{x} - \frac{1}{\frac{6}{x} - \dots}}}$

د.  $\tan x = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}}$

ج.  $\tan x = \frac{2}{x} - \frac{1}{\frac{4}{x} - \frac{1}{\frac{6}{x} - \dots}}$

۱۶. کدامیک از دستگاههای زیر بازنویسی معادله دیفرانسیل  $x'' - t^2 x' + x^2 = \cos t$  به صورت یک دستگاه مرتبه اول است؟

الف.  $u_1' = u_2, u_2' = u_3, u_3' = t^2 u_3 - u_1^2 + \cos t$

ب.  $u_1' = u_2, u_2' = u_3, u_3' = t^2 u_3 - x^2 + \cos t$

ج.  $u_1' = u_2, u_2' = u_3, u_3' = u_4, u_4 - t^2 u_3 + u_1^2 = \cos t$

د.  $u_1' = u_2, u_2' = u_3, u_3' = u_4, u_4 - t^2 u_3 + x^2 = \cos t$

۱۷. حاصل عبارت  $L[t]$  کدام است؟  $(t > 0, t \text{ جزء صحیح})$

الف.  $\frac{1}{s} \left( \frac{e^s}{1 - e^s} \right)$  ب.  $\frac{1}{s} \left( \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} \right)$

ج.  $\frac{1}{s} \left( \frac{e^s}{1 + e^s} \right)$  د.  $\frac{1}{s} \left( \frac{e^{-s}}{1 + e^{-s}} \right)$

۱۸. کدامیک از گزینههای زیر صحیح است؟

ب.  $L\left[\frac{e^{rt}}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

الف.  $L[\sin t + u_{\pi}(t) \cos t] = \frac{1 - se^{i\pi s}}{s^2 + 1}$

د.  $L[t^2 \cos t] = \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3}$

ج.  $L[1 - \sin t] = \frac{1}{s^3 + s}$

۱۹. کدامیک از گزینههای زیر صحیح نیست؟

ب.  $L^{-1}\left[\frac{2s + 3}{s^2 + 4s + 4}\right] = e^{-2t}(2 - t)$

الف.  $L^{-1}\left[\frac{s^2 - s + 1}{s^3 + s}\right] = 1 - \sin t$

د.  $L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 1)}\right] = u_{\pi}(t)(1 + \cos t)$

ج.  $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 3s + 4}\right] = e^t - e^{-4t}$

۲۰. جواب معادله انتگرالی  $f(t) = \frac{t^2}{2} - \int_0^t (t-u) f(u) du$  کدام است؟

الف.  $f(t) = 1 - \cos t$

ب.  $f(t) = 1 - \sin t$

د.  $f(t) = 1 + \sin t$

ج.  $f(t) = 1 + \cos t$

« سوالات تشریحی »

۱. معادله دیفرانسیل مرتبه اول  $y''' + 2xy' + 8x^3 y'' = 0$  را حل کنید.

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $x'''y'' + 4x''y' - 8xy' + 8y = 0$  را به ازای  $x > 0$  بدست آورید.

۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $x(x+1)y'' + (x+5)y' - 4y = 0$  را در نزدیکی نقطه  $x = 0$  که به ازای

$x$  های مثبت همگرا می باشد، بدست آورید.

۴. دستگاه روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1'' - 2x_1' + x_2' + x_3' + 3x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1' - 3x_2' - x_3' + x_1 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

۵. با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله دیفرانسیل زیر را با مقدار اولیه  $x'(0) = 0$  ,  $x(0) = 1$  حل کنید.

$$x''(t) + x(t) = f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 4 \\ 2t - 5 & t \geq 4 \end{cases}$$