

* دانشجوی گرامی: لطفاً، گزینه ۱ را در قسمت کد سری سؤال برگه پاسخنامه خود، علامت بزنید. بدیهی است، مسئولیت این امر برعهده شما خواهد بود.

* ماشین حساب مجاز است. * این آزمون نمره منفی ندارد.

۱. به چند طریق می‌توان ۱۰ دانشجو را به سه گروه ۱ نفری، ۳ نفری و ۶ نفری تقسیم کرد؟

الف. ۱۶۸۰ ب. ۲۵۲۰ ج. ۸۴۰ د. ۴۲۰

۲. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ برابر است با:

الف. ۱۴۰ ب. ۱۲۰ ج. ۶۰ د. ۹۰

۳. ضریب جمله $a^3 b^2 c$ در بسط $(a + 3b + 2c)^6$ برابر است با:

الف. ۱۲۰ ب. ۱۰۸۰ ج. ۱۸ د. ۲۷۰

۴. $\binom{n+k-1}{k}$ برابر است با:

الف. $\binom{n+k-1}{n}$ ب. $(-1)^k \binom{n+k-1}{n}$ ج. $\binom{-n}{k}$ د. $(-1)^k \binom{-n}{k}$

۵. $G(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ تابع مولد کدام دنباله است؟

الف. $\frac{n(n-1)}{2}$ ب. n ج. $\frac{n-1}{2}$ د. $\frac{n(n+1)}{2}$

۶. دنباله‌های $a = (a_n)$ ، $b = (b_n)$ مفروض هستند، کدام گزاره نادرست است؟

الف. $(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ب. $(a * b) * c = a * (b * c)$

ج. $G_{a.b}(s) = G_a(s) * G_b(s)$ د. $G_{a*b}(s) = G_a(s).G_b(s)$

۷. عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1$ کدام است؟

الف. $\frac{1}{1+x^2}$ ب. $1+x^2$ ج. $\ln(1+x^2)$ د. $\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

۸. جواب خصوصی با در نظر گرفتن جواب پیشنهادی برای معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = e^x$ کدام است؟

- الف. $x^2 e^x$ ب. $2xe^x$ ج. $\frac{1}{2} x^2 e^x$ د. $\frac{1}{2} xe^x$

۹. معادله مفسر معادله بازگشتی $U_{n+2} = 2U_{n+1} + 4U_{n-1} + 2$ عبارت است از:

- الف. $m^3 - 2m^2 - 4 = 0$ ب. $m^2 - 2m - 4 = 0$
ج. $m^3 + 2m + 4 = 0$ د. $m^3 - 2m - 4 = 0$

۱۰. جواب معادله بازگشتی $U_n - 9U_{n-2} = 0$ با شرایط اولیه $U_0 = 6$, $U_1 = 12$ عبارت است از:

- الف. $3^{n+1} + (-3)^n$ ب. $5(3^n) + (-3)^n$
ج. $4(3^n)$ د. $2(3^n) + 4(-3)^n$

۱۱. مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^e (1 - \frac{x}{n})^n dx$ برابر است با:

- الف. ۶ ب. ۱۲۰ ج. ۱۸ د. ۲۴

۱۲. مقدار انتگرال $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ برابر است با:

- الف. $\frac{3\sqrt{\pi}}{256}$ ب. $\frac{3\pi}{8}$ ج. $\frac{3\pi}{256}$ د. $\frac{\pi}{16}$

۱۳. کدام گزاره نادرست است؟

- الف. $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ ب. $B(\alpha, \beta + 1) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$
ج. $B(\alpha, \beta + 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$ د. $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$

۱۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$ عبارت است از:

- الف. $\frac{1}{s} e^{-s}$ ب. $\frac{1}{s}$ ج. $\frac{1}{s^2}$ د. $\frac{1}{s} e^s$

۱۵. اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ به صورت $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ باشد، آنگاه:

الف. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ب. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ ج. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ د. $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$

۱۶. تبدیل لاپلاس $\cos(\pi x)$ برابر است با:

الف. $\frac{s}{s^2 + \pi^2}$ ب. $\frac{\pi^2}{s^2 + \pi^2}$ ج. $\frac{\pi^2}{s^2 + 1}$ د. $\frac{s}{s^2 + 1}$

۱۷. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = xe^x \sin(x)$ برابر است با:

الف. $\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$ ب. $\frac{-2s}{(s^2 + 1)^2}$ ج. $\frac{2(s-1)}{((s-1)^2 + 1)^2}$ د. $\frac{s-1}{s^2 - 2s + 1}$

۱۸. کدام گزاره نادرست است:

الف. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

ب. $f * (g * h) = (f * g) * h$

ج. $L(f * g) = L(f).L(g)$ (تبدیل لاپلاس $L(f)$)

د. $L(f * g) = L(f) * L(g)$

۱۹. کدام گزاره درست است؟

الف. اگر دوری در گراف G موجود باشد به طوری که از تمام رئوس بگذرد، این دور را یک دور اویلری می‌نامیم.

ب. هر مسیر اویلری، یک دور اویلری است.

ج. گراف مسئله هفت پل گونیگسبرگ شامل یک مسیر اویلری است.

د. هر گراف مرتبط که فاقد رأس با درجه فرد باشد، دارای یک دور اویلری است.

۲۰. تعداد رئوس یک گراف منظم با ۹ یال که درجه هر رأس آن ۳ باشد برابر است با:

الف. ۱۸ ب. ۱۲ ج. ۶ د. ۹

سؤالات تشریحی

۱. الف. تابع مولد احتمال توزیع پواسن با پارامتر θ را بیابید. ۱/۵ نمره
ب. فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسن و به ترتیب با پارامترهای $\theta_1, \dots, \theta_n$ باشند. تابع مولد احتمال متغیر تصادفی $\sum_{i=1}^n X_i$ را به دست آورید.

۲. فقط دو معادله از سه معادله دیفرانسیل زیر را به صورت کامل حل نموده و جواب عمومی را بدست آورید. ۱/۵ نمره

الف. $(\sqrt{x^2 - y^2} + y)dx - xdy = 0$

ب. $y' = -\frac{e^y}{xe^y + 2y}$

ج. $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$

۳. جواب عمومی معادله بازگشتی $U_{n+2} - U_{n+1} - 2U_n = n^2$ را به دست آورید. ۱ نمره

۴. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای β, α باشد، در این صورت: ۱/۵ نمره

الف. $E(X^n)$ را بر حسب $\Gamma(\alpha)$ به دست آورید.

ب. با استفاده از بند الف، واریانس X را محاسبه کنید.

۵. با استفاده از تبدیل لاپلاس، $f(x)$ را از معادله انتگرالی $f(x) = 4x - 3 \int_0^x f(y) \sin(x-y) dy$ به دست آورید. ۱/۵ نمره