

امام خمینی^(ع): این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.

۱. جواب‌های معادله‌ی $z^3 - 1 = 0$ کدام است؟

الف. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب. $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ج. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

د. $1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

۲. عدد $(1 + i\sqrt{3})^{-1}$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

ب. $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

ج. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$

د. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$

۳. معادله‌ی $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1$ نشان دهنده‌ی چه شکلی در صفحه‌ی مختلط است؟

الف. خط راست ب. دایره ج. بیضی د. هذلولی

۴. تابع $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ یک تابع همساز است. تابع مزدوج همساز آن کدام است؟

الف. $V = 3x^2y^2 + 4xy - 2x^3 + c$

ب. $V = 3xy^2 + 4xy - x^4 + c$

ج. $V = 4xy^2 + 3xy + x^3 + c$

د. $V = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$

۵. کدام یک از توابع زیر تام است؟

الف. $f(z) = \frac{1}{z}$ ب. $f(z) = z^4$ ج. $f(z) = \operatorname{Re} z$ د. $f(z) = |z|^2$

۶. کدام رابطه درست است؟

الف. $\sinh z = -\sin iz$

ب. $\cosh z = -i \cos iz$

ج. $\cosh z = i \cos iz$

د. $\sinh z = -i \sin iz$

۷. دوره تناوب تابع $\sinh z$ برابر است با:

الف. 2π ب. $2k\pi$ ج. $2\pi i$ د. πi

۸. مقدار اصلی i^i کدام است؟

الف. $\exp(-\frac{\pi}{2})$ ب. $\exp(\frac{\pi}{2})$ ج. $-\exp(\frac{\pi}{2})$ د. $-\exp(-\frac{\pi}{2})$



دانشگاه گیلان
مرکز آزمون

۹. تصویر نقاط داخل دایره‌ی $|z|=1$ تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ کدام است؟

الف. نقاط واقع در نیم صفحه‌ی راست

ب. نقاط واقع در بیرون دایره‌ی $|z|=1$

ج. نقاط واقع در نیم صفحه‌ی فوقانی

د. نقاط واقع روی خط $y=0$

۱۰. انتگرال $\int_C f(z) dz$ وقتی $f(z) = x^2 + iy^3$ ، C سهمی $y = x^2$ از مرکز مختصات تا نقطه‌ی $A(1,1)$ می‌باشد برابر است با:

الف. $\frac{1}{12} + i\frac{9}{14}$

ب. $\frac{9}{13} + i\frac{1}{14}$

ج. $\frac{1}{13} + i\frac{9}{14}$

د. $\frac{1}{14} + i\frac{9}{13}$

۱۱. حاصل $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2 - 2z} dz$ که در آن C مرز دایره‌ی $|z|=1$ می‌باشد، کدام است؟

الف. πi

ب. $-\pi i$

ج. $2\pi i$

د. $-2\pi i$

۱۲. حاصل انتگرال $\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz$ ، که در آن C دایره‌ی $|z|=1$ می‌باشد، کدام است؟

الف. πi

ب. $2\pi i$

ج. صفر

د. $-2\pi i$

۱۳. حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \cos \theta}}$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{4}$

ب. $-\frac{1}{2}$

ج. 2π

د. ۱

۱۴. ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه‌ی $2 < |z-1| < 3$ برابر است با:

الف. صفر

ب. $\frac{1}{2}$

ج. $\frac{1}{8}$

د. $-\frac{1}{5}$

۱۵. اگر سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$ برای فاصله‌ی $(-\pi, \pi)$ با شرط $f(x+2\pi) = f(x)$ برابر با

باشد، آن گاه مقدار سری $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ برابر است با:

الف. $\frac{\pi}{2}$

ب. π

ج. $\frac{\pi}{4}$

د. $\frac{\pi}{8}$

۱۶. سری فوریه نمایی تابع متناوب زیر کدام است؟

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi, f(x + 2\pi) = f(x)$$

الف. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i e^{inx}}{n}$ ب. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i e^{inx}}{n^2}$

ج. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{n^2}$ د. $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{n}$

۱۷. انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ کدام است؟

الف. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ ب. $\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin wx \cos w}{w} dw$

ج. $\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ د. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin wx \cos w}{w} dw$

۱۸. تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ کدام است؟

الف. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left(\frac{\sin aw}{w} \right)$ ب. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$

ج. $\frac{k(1 - e^{-iwa})}{iw\sqrt{2\pi}}$ د. $\frac{k(1 - e^{iwa})}{iw\sqrt{2\pi}}$

۱۹. برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xe^{x+y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ کدام گزینه درست است؟

الف. به ازای هر x, y از نوع هذلولیگون است

ب. به ازای $y = 1$ از نوع سهمیگون است

ج. به ازای $x = y$ از نوع هذلولیگون است

د. به ازای هر x که $-1 < x < 1$ از نوع بیضیگون است

۲۰. کدام یک از معادلات زیر، معادله پخش گرما در حالت دو بعدی است؟

الف. $u_{xx} = u_{yy} + 1$ ب. $3u_t - 2u_{xx} = u_{yy}$

ج. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ د. $u_t = u_{xx} - u_{yy}$

سوالات تشریحی (بارم هر سؤال ۲ نمره)

۱. تبدیل دو خطی ای را بیابید که نقاط $z_1 = \infty$, $z_2 = i$, $z_3 = 0$ را به روی نقاط $w_1 = 0$, $w_2 = i$, $w_3 = \infty$ می نگارد.

۲. حاصل انتگرال $\oint_C (z - z_0)^m dz$ را که در آن m عددی صحیح، z_0 عددی مختلط و C دایره ای به مرکز z_0 و شعاع r است، بیابید.

۳. حاصل انتگرال $\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$ را با استفاده از مانده ها بیابید.

۴. تابع $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $-\pi < x < \pi$ با دوره تناوب 2π را در نظر بگیرید.

الف. سری فوری ی f را بنویسید. (در صورت امکان از زوج و فرد بودن f استفاده کنید).

ب. با استفاده از آن نشان دهید: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

۵. معادله ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را تحت شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u_t(x, 0) = 0$$

$$u(x, 0) = 3 \sin \pi x - 4 \sin 5\pi x$$