مرکز آزمون

کلید سئوالات تشریحی (محرمانه)

نام درس: ریاضی مهندسی

کد درس: ۱۱۱۱۰۹۵

رشته تحصیلی-گرایش: کامپیوتر (سخت - تجمیع) (نرم‌افزار) - تجمیع (سخت‌افزار) هر سوال ۲ نمره

مقطع: کارشناسی سال تحصیلی: ۸۹ نیمسال: اول ○ دوم ○ ترم تابستان ⊗ تاریخ آزمون: ۴/۳ بارم: ۱۵ نمره

۱- چون طول سه بردار مساوی است کافی است نشان دهیم زاویه‌ای که دو به دو با هم می‌سازند 120° است.

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cos\theta_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2)$$
$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 .$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow (a_1, b_1) + (a_2, b_2) + (a_3, b_3) = 0 \Rightarrow$$

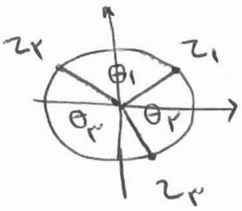
$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad , \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -a_3 \\ b_1 + b_2 = -b_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = a_3^2 \\ b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 b_2 = b_3^2 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow}$$

$$(\underbrace{a_1^2 + b_1^2}_{1}) + (\underbrace{a_2^2 + b_2^2}_{1}) + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) = \underbrace{a_3^2 + b_3^2}_{1}$$

$$\Rightarrow 2 + 2\cos\theta = 1 \Rightarrow 2\cos\theta = -1 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

به همین ترتیب $\theta_2 = \theta_3 = 120^\circ$.



۲- قضیه: فرض کنید $f(z)$ داخل و روی مرز دایره C به مرکز a و شعاع r تحلیلی باشد. آنگاه $f(a)$ میانگین مقادیر $f(z)$ روی C خواهد بود. یعنی

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta .$$

برهان . بنا به فرمول انتگرال کوشی داریم

$$) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$c:\ |z-a|=r \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, r i e^{i\theta}\, d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta .$$

ب . با فرمول مقدار میانگین گاوس :

$$\int_0^{2\pi} \ln(a^2+1+2a\cos n\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(a+e^{in\theta})(a+e^{-in\theta})\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(a+e^{in\theta})\, d\theta + \int_0^{2\pi} \ln(a+e^{-in\theta})\, d\theta = 2\pi(\ln a+\ln a) = 4\pi \ln a$$

۳-

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)\, d\alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos\alpha t\, dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\alpha}(\sin\alpha\pi + \sin\alpha\pi) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\sin\alpha t\, dt \overset{\text{فرد}}{=} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha \qquad x=0 \Longrightarrow f(0) = \pi = 2\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \xrightarrow[d\alpha = \frac{dx}{\pi}]{\alpha\pi = x} \int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\, d\alpha = \int_0^{\infty}\frac{\sin x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

مرکز آزمون

کلید سؤالات تشریحی (محرمانه)

نام درس: ریاضیات مهندسی

کد درس: ۱۱۱۱۰۹۵

رشته تحصیلی-گرایش: کامپیوتر (سخت‌افزار-نرم‌افزار) - تجمیع (نرم‌افزار) - تجمیع (سخت‌افزار)

مقطع: کارشناسی سال تحصیلی: ۸۹ نیمسال: اول○ دوم○ ترم تابستان⊗ تاریخ آزمون: بارم: ۶٫۵ نمره

$f(x)=x^2 \quad , \quad 0<x<2 \qquad b_n=0 \quad \forall n \quad , \quad a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$ (-4

$, \quad a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2 \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = 2x\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2 =$

$\frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi = (-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2}.$

$f(x)=x^2=\frac{8}{6}+\sum_{n=1}\frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}$

$\sum_{n=1}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi}{2}x}{n^2} \xrightarrow{\text{پارسوال}} \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}(a_n^2+b_n^2)=\frac{64}{18}+$

$\sum_{n=1}\frac{16\times 16}{n^4\pi^4} \quad , \quad \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^4\,dx=\frac{64}{10}$

$\Longrightarrow \frac{64}{10}=\frac{64}{18}+\frac{16\times 16}{\pi^4}\sum_{n=1}\frac{1}{n^4} \Longrightarrow \sum_{n=1}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$

پارسوال:

۱ نمره $\quad \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}(a_n^2+b_n^2)$

۵-

$\ldots xx \;,\; |x|<\infty \;,\; 0<t \ldots$

آنگاه $|x| \to \infty$

$= e^{-x^2}$

$u(x,t) = ?$

$F(u(x,t)) = U(\alpha,t)$

فوریه برحسب x

$$u_t = u_{xx} \xRightarrow{\text{فوریه برحسب } x} U_t(\alpha,t) = -\alpha^2 U(\alpha,t) \Rightarrow \frac{U_t(\alpha,t)}{U(\alpha,t)} = -\alpha^2$$

$$\xRightarrow{\text{نسبت به } t} \ln U(\alpha,t) = -\alpha^2 t + c \Rightarrow U(\alpha,t) = c e^{-\alpha^2 t} \Rightarrow$$

$$U(\alpha,0) = ce^0 = c \quad , \quad U(\alpha,0) = F(U(x,0)) = F(e^{-x^2}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha^2/4} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha^2/4} \Longrightarrow U(\alpha,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha^2/4} e^{-\alpha^2 t}$$

$$\Rightarrow U(x,t) = F^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha^2\left(\frac{1}{4}+t\right)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} F^{-1}\left(e^{-\alpha^2\left(\frac{4t+1}{4}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} F^{-1}\left(e^{-\alpha^2 / \frac{4}{4t+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{\frac{-x^2}{4t+1}}$$