

تعداد سؤال: نسی

زمان امتحان: تستی و تکمیلی

نام درس: ریاضیات مهندسی

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی کامپیوتر

تعداد کل صفحات: ۴

کد درس: ۲۶۱۱۹۰

۱. اگر z یک عدد مختلط باشد، آرگومان و قدر مطلق e^{z+i} به ترتیب از راست به چپ کدام است؟
 الف. $e^{x+1}, y+1$ ب. e^x, y ج. e^{x+1}, y د. $e^x, y+1$
۲. پاسخهای معادله جبری $z^3 = 8$ که در فضای اعداد مختلط تعریف شده است کدام هستند؟
 الف. $z = -2, 1 \pm i\sqrt{3}$ ب. $z = 2, -1 \pm i\sqrt{3}$ ج. $z = 2, -1 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ د. $z = 2, 1 \pm i\sqrt{3}$
۳. اگر $u(x, y) = 2x(1-y)$ باشد، تابع v مزدوج همسان u باشد. یعنی $f = u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه:
 الف. $f'(z) = 2iz$ ب. $f'(z) = -y + ix$ ج. $f'(z) = 2(1-y) + 2ix$ د. $f'(z) = 2(1-y) + 2i(x-1)$
۴. مقدار اصلی $Ln(ie)$ کدام است؟
 الف. $1 - \frac{i\pi}{2}$ ب. $-1 + i\pi$ ج. $1 + \frac{i\pi}{2}$ د. $1 + i\pi$
۵. مقدار انتگرال $\int_C \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$ زمانی که C دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز $z = i$ باشد، کدام است؟
 الف. $\pi(\cos 1 + i \sin 1)$ ب. $\frac{\pi}{2}(\cos 1 + i \sin 1)$ ج. $\cos \pi + i \sin \pi$ د. $\pi(\cos \frac{1}{2} + i \sin \frac{1}{2})$
۶. اگر $z = x + iy$ باشد. آنگاه مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2z-1)^2}$ برابر است با:
 الف. 0 ب. $2\pi i$ ج. πi د. $\frac{\pi i}{2}$
۷. اگر تابع $u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد. تحت چه شرایطی $v(x, y) + iu(x, y)$ نیز تحلیلی خواهد بود.
 الف. اگر u فقط تابع x ، v فقط تابع y ب. اگر u فقط تابع y ، v فقط تابع x ج. اگر هم u و هم v مقادیر ثابت باشند. د. همواره تحلیلی است.
۸. سه جمله اول بسط تیلور تابع $f(z) = Ln(1+z)$ با $|z| < 1$ عبارت است از:
 الف. $1 + z + z^2$ ب. $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ ج. $z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}$ د. $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}$
۹. ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $3 < |z-1| < 2$ برابر است با:
 الف. 0 ب. $\frac{1}{2}$ ج. $\frac{1}{8}$ د. $-\frac{1}{5}$

۱۰. در نقطه $z = 1$ تابع $f(z) = e^{-1/(z-1)^2}$ دارای:

- الف. یک قطب مرتبه دوم است.
 ب. یک نقطه تکین اساسی است.
 ج. یک نقطه تکین برداشتنی است.
 د. گزینه الف و ب صحیح است.

۱۱. باقیمانده تابع $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در نقطه $z = 1$ برابر است با:

- الف. $-\frac{1}{4}$
 ب. $\frac{1}{4}$
 ج. $\frac{1}{2}$
 د. $-\frac{1}{2}$

۱۲. انتگرال $\int_C \operatorname{tg} z dz$ که C دایره $|z| = 2$ در جهت مثبت مثلثاتی است برابر است با:

- الف. $4\pi i$
 ب. $2\pi i$
 ج. $-4\pi i$
 د. $-2\pi i$

۱۳. با استفاده از روش باقیمانده $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$ برابر است با:

- الف. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
 ب. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
 ج. $-\frac{2\pi}{3}$
 د. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

۱۴. کدام یک از تبدیلات زیر یک قطاع 45° را درون دایره واحد می‌نگارد.

- الف. $w = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$
 ب. $w = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$
 ج. $w = \frac{z^2 + i}{z^2 - i}$
 د. $w = \frac{z^4 + i}{z^4 - i}$

۱۵. تبدیل کسری خطی که نقاط $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ را به ترتیب بر روی $w_3 = 3i$, $w_2 = i$, $w_1 = 0$ می‌نگارد کدام است؟

- الف. $w = i \frac{2z + 1}{2z - 4}$
 ب. $w = \frac{z + 1}{2z + 4}$
 ج. $w = 3i \frac{z + 1}{z - 3}$
 د. $w = \frac{z + 2}{2z - 4}$

۱۶. انتگرال فوریه تابع زیر برابر است با:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

ب. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin(n\pi x)$

د. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$

الف. $-\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$

ج. $\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$

۱۷. جواب عمومی معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = x$ برابر است با:

ب. $u = f(y - 2x) + \frac{x^2}{2}$

الف. $u = e^{y-2x} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

د. $u = \sin(y - 2x) + \frac{x^2}{2}$

ج. $u = \sin(y - 2x) + \frac{x^2}{2} + 1$

۱۸. کدام یک از معادلات زیر همگن است؟

ب. $\frac{\partial u}{\partial x} + u + 2 = 0$

الف. $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy = 0$

د. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu = y \frac{\partial u}{\partial x} + xy$

ج. $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + \ln y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$

۱۹. برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام گزاره درست است؟

$$e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xe^{x+y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2y} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

الف. به ازای هر x و y از نوع هذلولی گون است.

ب. به ازای هر $y = 1$ از نوع سهمی گون است.

ج. به ازای هر $1 < x < -1$ از نوع بیضی گون است.

د. به ازای $x = y$ از نوع هذلولی گون است.

۲۰. درمورد تابع $f(z) = \frac{z^5}{(z^2 - 4)e^{\frac{1}{z-2}}}$ صحیح‌ترین عبارت کدام است؟

الف. $z = 2$ ، نقطه تکین اساسی و $z = -2$ قطب مرتبه دوم است.

ب. $z = 2$ ، نقطه تکین اساسی نیست $z = -2$ قطب مرتبه دوم است.

ج. $z = \pm 2$ ، قطبهای مرتبه دو تابع هستند.

د. $z = 2$ ، قطب مرتبه یک تابع است.

سئوالات تشریحی

۱. اگر z_1, z_2, z_3 اعدادی مختلط با طول مساوی باشند و علاوه بر آن داشته باشیم:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ ، ثابت کنید:}$$

$$\text{اولاً } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \text{ و ثانیاً } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 .$$

۲. الف) ثابت کنید تابع $u = \cosh x \cdot \sin y$ یک تابع همساز است.

ب) تابع تحلیلی $f = u + iv$ چنان بسازید که u در آن همان تابع قسمت الف باشد. آیا این تابع f را می شناسید.

۳. مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$ با استفاده از قضیه باقیمانده، سری لوران تابع $e^{\frac{1}{z}}$ بدست آورید.

۴. انتگرال فوریه تابع $\begin{cases} f(x) = e^{-x} & x > 0 \\ f(x) = f(-x) \end{cases}$ را بدست آورید.

۵. مسئله مقدار مرزی زیر را بروش جداسازی متغیرها حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , & 0 < x < \pi , 0 < t \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 , & 0 \leq t \leq \pi \\ u(x, 0) = \sin x , & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

صفحه: ۱

رشته: کامپیوتر

پاسخ سوالات تشریحی درس ریاضی محترمی

محرمانه مستقیم

توضیح طراح سوال

سال تحصیلی ۱۴۰۱، نیمه اول ☒ نیمه دوم ☐ بارم: هر سوال ۱ نمره

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = k \Rightarrow \begin{cases} z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3 = k^2 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_i = \frac{k^2}{z_i}, \forall i=1,2,3 \Rightarrow \frac{k^2}{z_1} + \frac{k^2}{z_2} + \frac{k^2}{z_3} = k^2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = 0$$

$$\xrightarrow{k \neq 0} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \Rightarrow \text{اولی نامتجانس}$$

$$\Rightarrow \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2 = 0 \\ (z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0^2 = 0 \end{cases} \text{ از طرفی}$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2) = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow \text{ثانی نامتجانس}$$

$$\text{الف) } u = \cosh x \sin y \Rightarrow \begin{cases} u_x = \sinh x \sin y \\ u_y = \cosh x \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = \cosh x \sin y \\ u_{yy} = -\cosh x \sin y \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u = \text{هموار}$$

$$\text{ب) } f = u + iv = \text{متجانسی} \Rightarrow v = u \text{ هموار} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = \int u_x \cdot dy = \int \sinh x \sin y \cdot dy = -\sinh x \cos y \\ v_x = \int -u_y \cdot dx = \int -\cosh x \cdot \cos y \cdot dx = -\sinh x \cdot \cos y \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= \cosh x \cdot \sin y - i \sinh x \cos y = \sin y \cosh x - i \cos y \sinh x \\ &= \sin y \cosh(-x) + i \cos y \sinh(-x) = \sin(y - ix) \\ &= \sin(i(-iy - x)) = \sin(-i(x + iy)) = \sin(-iz) = f_{\text{ماتریس}} \end{aligned}$$

پاسخ سوالات تشریحی درس ریاضی عمومی رشته کامپیوتر صفحه ۲

نیمسال دوم

سال تحصیلی ۸۷-۸۶ نیمسال اول

$$z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} = z^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots \right) = z^{\frac{1}{2}} + z + \frac{1}{2!}z^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3!}z^{\frac{5}{2}} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1!} = \text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{|z|=1} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} dz = 2\pi i (\text{Res}_{z=0} f(z)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \right) = \pi i$$

$$A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx ; B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx = \frac{e^{-x}}{1+\omega^2} (-\cos \omega x + \omega e^{-x} \sin \omega x) \Big|_0^{\infty}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+\omega^2} d\omega$$

پاسخ ۵ - مثال ۱۴ ، صفحه ۲۰۸ و ۲۰۹