پاسخ سؤالات تشریحی درس: ریاضیات مهندسی رشته: مهندسی کامپیوتر (نرم‌افزار - سخت‌افزار) صفحه: ۱

سال تحصیلی ۸۷-۸۸ نیمسال اول ☑ نیمسال دوم ○ بارم هر سؤال ۲ نمره

۱- باید نشان داد که تابع $u(x,y)=x+\frac{x}{x^2+y^2}$ در رابطه لاپلاس $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\right)$ صدق می‌کند پس موزون است و مزدوج موزون آن را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

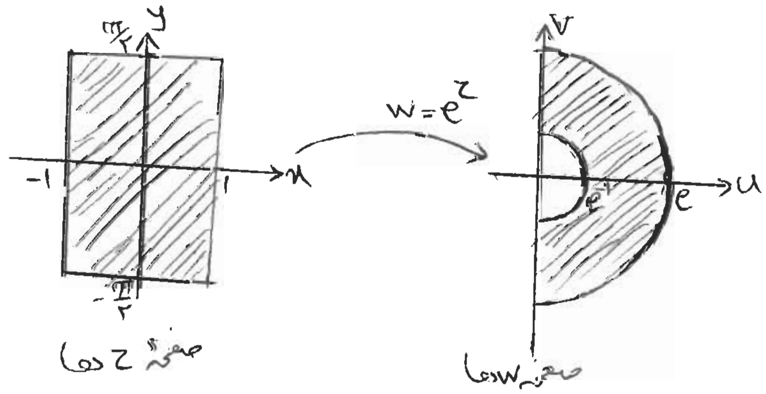
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow v=\int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{-y}{x^2+y^2}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow\varphi'(y)=1\Rightarrow\varphi(y)=y$$

$$\Rightarrow v(x,y)=y-\frac{y}{x^2+y^2}\quad\Rightarrow f(z)=x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=x+iy+\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$=z+\frac{1}{z}$$

۲- الف) تمرین ۳ قسمت (iv) صفحه ۹۰ کتاب:

خطوط $x=1$ و $x=-1$ به دایره‌های $|w|=e$ و $|w|=e^{-1}$ تصویر می‌شوند. که چون $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$، پس فقط نیم‌دایره‌های سمت راست قابل قبول می‌باشند (دقت کنید که $y=\arg e^z$).



ب)
$$e^{2z-1}=1+\sqrt{3}i\Rightarrow 2z-1=Ln(1+\sqrt{3}i)=Ln2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$
$$\Rightarrow z=\frac{1+Ln2}{2}+i\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\quad,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

دانشگاه پیام نور

بانک سؤال

۱۱۱۱۰۹۵

ادامهٔ کلید تشریحی

پاسخ سؤالات تشریحی درس: ریاضیات مهندسی رشته: مهندسی کامپیوتر (نرم افزار، سخت افزار) صفحه: ۲

سال تحصیلی ۸۷-۸۸ نیمسال اول ✓ نیمسال دوم ○

۳-

الف) $$\int_{|z|=1} \frac{(z+4)^3}{z^2(z^2+5z+6)}dz = 2\pi i \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+4)^3}{z^2+5z+6}\right]_{z=0} = -\frac{16\pi i}{9}$$

ب) تمرین ۱۱ قسمت (آ) صفحهٔ ۱۱۲ کتاب: با استفاده از تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ و $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$ و $d\theta=\frac{dz}{iz}$ داریم:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(5+\frac{2(z^2+1)}{z}\right)^2} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z+2)^2(2z+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2i}(2\pi i)\left(\frac{5}{27}\right) = \frac{5\pi}{27}$$

۴-

$$a(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos\alpha x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(1+\alpha)x+\sin(1-\alpha)x\right)dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+\alpha)x}{1+\alpha}+\frac{\cos(1-\alpha)x}{1-\alpha}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}+\frac{1-\cos(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos\alpha\pi}{1+\alpha}+\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha}\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2} \Longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\, d\alpha$$

اکنون به ازاء $x=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\, d\alpha \Longrightarrow \int_0^{\infty}\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\, d\alpha=\frac{\pi}{2}$$

۵- با استفاده از روش تغییر متغیرها فرض می‌کنیم $u=XT$ ، با جایگذاری آن در معادله داریم:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=-\lambda^2 \Longrightarrow \begin{cases} X''+\lambda^2X=0 \quad X(0)=X(\pi)=0 \Rightarrow X_n=\sin nx \ ,\ \lambda_n=n \\ T'+\lambda^2T=0 \Longrightarrow T_n=e^{-\lambda^2 t}=c_ne^{-n^2t}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow u_n(x,t)=c_ne^{-n^2t}\sin nx \Longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-n^2t}\sin nx$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx = x(\pi-x) \Longrightarrow c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\, dx$$

$$\Longrightarrow c_n=\frac{2}{\pi}\left(\pi\int_0^{\pi}x\sin nx\, dx-\int_0^{\pi}x^2\sin nx\, dx\right)=4\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}$$

$$\Longrightarrow u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum \frac{e^{-(2n-1)^2t}}{(2n-1)^3}$$