

۱. اگر  $z_1, z_2, z_3$  اعدادی مختلط با طولهای مساوی باشند و  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح

نمی باشد؟

ب.  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

الف.  $z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 0$

د.  $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$

ج.  $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0$

۲. مقدار  $18(1+i)^{-2}$  برابر است با:

د.  $4(1+i)$

ج.  $4(1-i)$

ب.  $-\frac{1}{4}$

الف.  $-\frac{1}{8}$

۳. کدامیک از معادلات زیر نمایش هذلولی  $x^2 - y^2 = 1$  است؟

د.  $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

ج.  $(z + \bar{z})^2 = 1$

ب.  $z^2 - \bar{z}^2 = 1$

الف.  $z\bar{z} = 1$

۴. دوره تناوب  $w = \cosh z$  برابر است با:

د. این تابع متناوب نیست.

ج.  $2\pi i$

ب.  $\pi i$

الف.  $2\pi$

۵. کدامیک از نگاشتهای زیر در هیچ نقطه از صفحه مختلط مشتق پذیر نمی باشد؟

د.  $f(z) = x^2 + iy^2$

ج.  $f(z) = \bar{z}^2$

ب.  $f(z) = 2x + ixy^2$

الف.  $f(z) = |z|^2$

۶. یک مزدوج موزون برای تابع  $u(r, \theta) = r \ln r \cos \theta - r \theta \sin \theta$  عبارت است از:

الف.  $v(r, \theta) = r \ln r \sin \theta + r \theta \cos \theta$  ب.  $v(r, \theta) = r \ln r \cos \theta + r \theta \sin \theta$

ج.  $v(r, \theta) = r \ln r \sin \theta - r \theta \cos \theta$  د.  $v(r, \theta) = r \ln r \cos \theta - r \theta \sin \theta$

۷. تصویر ناحیه  $0 \leq \text{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}$  تحت نگاشت  $w = iz^2$  کدام ناحیه در صفحه  $w$  می باشد؟

د. ربع چهارم

ج. ربع سوم

ب. ربع دوم

الف. ربع اول

۸. مقدار اصلی عبارت  $\left[\frac{e}{\sqrt{3}}(-1-i\sqrt{3})\right]^{3\pi i}$  عبارت است از:

- الف.  $e^{4\pi^2}$  ب.  $e^{2\pi^2}$  ج.  $-e^{2\pi^2}$  د.  $-e^{4\pi^2}$

۹. حاصل  $\int_{|z|=2} \frac{z^2+9}{(z-1)(z^2+1)} dz$  برابر است با:

- الف.  $2\pi i$  ب.  $4\pi i$  ج.  $8\pi i$  د.  $16\pi i$

۱۰. حاصل  $\int_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z}} dz$  برابر است با:

- الف.  $\frac{8\pi i}{45}$  ب.  $\frac{8\pi i}{15}$  ج.  $\frac{4\pi i}{3}$  د.  $\frac{8\pi i}{3}$

۱۱. بسط لوران تابع  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$  روی ناحیه  $|z| > 1$  کدام است؟

- الف.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}$  ب.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$  ج.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$  د.  $-\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

۱۲. حاصل انتگرال  $\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 3e^{i\theta}\right) d\theta$  برابر است با:

- الف.  $2\pi$  ب.  $\pi$  ج.  $\frac{\pi}{2}$  د.  $\frac{\pi}{3}$

۱۳. تابع  $f$  در بازه  $[0, \pi]$  با ضابطه  $f(t) = \cos^2 t$  تعریف شده است در این صورت سری فوریه کسینوسی نیم دامنه  $f$  برابر است با:

- الف.  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$  ب.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$  ج.  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nt}{n}$  د.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$

۱۴. سری فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$  با  $f(x + 2\pi) = f(x)$  کدام است؟

الف.  $\frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  ب.  $\frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n-1)x}{2n-1}$

ج.  $\frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$  د.  $\frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$

۱۵. مقدار سری فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{l}{2} \\ 1 & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$  با  $f(x+l) = f(x)$  در  $x = \frac{3l}{2}$  به چه مقدار همگراست؟

الف. ۱ ب.  $\frac{1}{2}$  ج. ۰ د. در این نقطه مقداری ندارد.

۱۶. انتگرال فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$  کدام است؟

الف.  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$  ب.  $\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \alpha) \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha$

ج.  $\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$  د.  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$

۱۷. نگاشت کسری خطی که نقاط  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$  را به نقاط  $w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = -i$  تبدیل کند کدام است

الف.  $w = \frac{1}{iz}$  ب.  $w = \frac{i}{z}$

ج.  $w = \frac{1}{z-i}$  د.  $w = \frac{i}{z+1}$

۱۸. جواب عمومی معادله  $u_{xx} + u_x - 2u = 0$  کدام است؟

الف.  $u = F(x)e^y + G(x)e^{-2y}$  ب.  $u = F(x)e^x + G(y)e^{-2y}$

ج.  $u = e^x + e^{-2x}$  د.  $u = F(y)e^x + G(y)e^{-2x}$

۱۹. نوع معادله  $u_{xx} + 2u_{xy} + 7u_{yy} = 0$  و تغییر متغیر آن برای تبدیل به صورت کانونی کدام است؟

الف. بیضی وار:  $\eta = 4x, \xi = y - x$  ب. هذلولیگون:  $\eta = 4x, \xi = y - x$

ج. بیضی وار:  $\eta = x, \xi = y - 4x$  د. سهمی گون:  $\eta = 4x, \xi = y - x$

۲۰. شرایط مرزی ناهمگن مسئله زیر با چه تغییر متغیری همگن می شود؟

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) = 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

الف.  $u(x, t) = v(x, t) + x^2 + x$  ب.  $u(x, t) = v(x, t) + x - 1$

ج.  $u(x, t) = v(x, t) + x + 1$  د.  $u(x, t) = v(x, t) + x^2 - x$

### سوالات تشریحی

۱. ابتدا نشان دهید که تابع  $u(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$  موزون است. سپس مزدوج موزون آن و تابع تحلیلی

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  که قسمت حقیقی آن است را به دست آورید.

۲. الف) تصویر ناحیه  $|x| < 1, |y| < \frac{\pi}{2}$  را تحت نگاشت  $w = e^z$  به دست آورید.

ب) همه جوابهای معادله  $e^{2z-1} = 1 + \sqrt{3}i$  را به دست آورید.

۳. حاصل انتگرالهای زیر را به دست آورید.

ب. 
$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(\omega + \epsilon \cos \theta)^2}$$

الف. 
$$\int_{|z|=1} \frac{(z + \epsilon)^3}{z^4 + \omega z^3 + \epsilon z^2} dz$$

۴. انتگرال فوریه کسینوسی تابع  $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$  را به دست آورید و به کمک آن حاصل انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x^2} \cos \frac{\pi x}{2} dx$$
 را به دست آورید.

۵. جواب مسئله گرمای زیر را به روش جداسازی به دست آورید.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$