

امام علی(ع): هر که در آنچه آموخته است بسیار اندیشه کند؛ دانش خود را استوار گرداند و آنچه را نمی فهمیده، بفهمد.

۱. می دانیم واریانس S^2 مجموعه مشاهدات x_1, \dots, x_n را می توان با استفاده از هر کدام از فرمول های زیر محاسبه نمود. بررسی نمائید که کدامیک از آنها از نظر عددی قابل اعتمادتر است؟ (۳ نمره)

$$1) S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

$$2) S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

۲. شرایط لازم جهت همگرایی درونیاب اسپلاین مکعبی را بیان نمائید. مشخص کنید که آیا نرم افراز $\|\Delta\|$ را می توان به اندازه دلخواه کوچک نمود؟ (۲ نمره)

۳. الف) بررسی نمائید که به ازای کدام مقادیر x_1, \dots, x_n و w_1, \dots, w_n تساوی زیر برقرار است؟

$$\int_{-1}^1 P(x) = \sum_{i=1}^n w_i P(x_i), \quad \forall P \in \Pi_{2n-1}$$

ب) آیا رابطه بند الف) ممکن است به ازای $P \in \Pi_{2n}$ نیز برقرار باشد؟

ج) با انتخاب $n = 2$ بند الف) را اجرا نمائید. (۳ نمره)

۴. فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی و درجه $n \geq 2$ باشد ثابت کنید اگر ریشه های α_i از چند جمله ای $P(x)$ که $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ همگی حقیقی باشند آنگاه دنباله x_k از روش نیوتن به ازاء هر انتخاب اولیه $x_0 > \alpha_1$ همگرا است. (۳ نمره)

۵. ثابت کنید برای هر ماتریس معین مثبت $A_{n \times n}$ یک ماتریس پائین مثلثی منحصر به فرد $L_{n \times n}$ با درایه های قطری مثبت وجود دارد به طوریکه $A = LL^H$ (مزدوج را نهاده ماتریس L است). (۳ نمره)