

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۲۰۰ نمره

۱- الف. هرگاه همه جملات در محاسبه  $\sum_{i=0}^n a_i$  هم علامت باشند نشان دهید که خطای نسبی آن از بالا کراندار

است

ب. نحوه ارزیابی عبارت زیر را در یک روش پایداری عددی نشان دهید

$$\frac{1}{2x+1} - \frac{1-x}{1+x}, |x| \leq 1$$

۲۰۰ نمره

۲- الف. ثابت کنید که نقاط اتکای یک مساله درونیاب گویای  $A^{u,v}$  غیر قابل حل در موقعیت ویژه قرار دارند  
ب. با استفاده از تفاضلات معکوس و همچنین متقابل و به کمک کسر مسلسل تیل تابع درونیاب نقاط اتکای زیر  
را بیابید و برابری جوابها را نشان دهید

$$(x_0, f_0) = (0, 1), (x_1, f_1) = (1, 3), (x_2, f_2) = (-1, \frac{3}{5}), (x_3, f_3) = (2, 3)$$

۲۰۰ نمره

۳- چند جمله ای فاز  $p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{ijx}$  برای  $f_k$  مختلط و  $x_k = \frac{2\pi}{N}$  در

 $p(x_k) = f_k, k = 0, \dots, N-1$  صدق می کند اگر و تنها اگر

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k w_k^{-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}$$

۲۰۰ نمره

۴- الف. فرض کنید  $f \in C^4[a, b]$  و  $|f^{(4)}(x)| \leq L$  و  $\Delta$  یک افراز روی  $[a, b]$  باشد

 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  و  $k$  را ثابتی در نظر بگیریم که

اگر  $\frac{\|\Delta\|}{|x_{j+1} - x_j|} \leq k, j = 0, \dots, n-1$  تابع اسپلین باشد که مقادیر تابع  $f$  را درونیابی کند

و  $S'_\Delta(x) = f'(x), x = a, b$  را برآورد کند آنگاه ثابت  $c_3 \leq 2$  وجود دارند که

$$\forall x \in [a, b], |f^{(3)}(x) - s_\Delta^{(3)}(x)| \leq c_3 L k \|\Delta\|$$

ب. اسپلین طبیعی را برای داده های زیر در بازه  $[-1, 1]$  به دست آورید

$$(-1, 1), (0, 2), (1, -1)$$

۵- فرض کنید روش سیمسون را روی بازه  $[-1, 1]$  برای  $n = 3$  داشته باشیم هسته پئانو برای محاسبه خطای این روش را به دست آورید.

۶- فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ریشه های  $n$  امین چند جمله ای متعامد  $p_n(x)$  باشد و همچنین  $w_1, w_2, \dots, w_n$  جوابهای دستگاه معادلات زیر باشند

$$\sum_{i=1}^n p_k(x_i) w_i = \begin{cases} (p_0, p_0) ; k = 0 \\ 0 ; k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

آنگاه  $w_i > 0$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  و همچنین داریم که رابطه  $\int_a^b w(x) p(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i)$  برای همه چند جمله ای  $p \in \Pi_{2n-1}$  برقرار است.

۷- اگر برای هر  $x$  در ناحیه محدب  $C_0 \subseteq \mathbb{R}^n$   $Df(x)$  موجود باشد و همچنین یک مقدار ثابت  $\gamma$  وجود داشته باشد به طوری که  $\forall x, y \in C_0, \|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$  آنگاه  $\forall x, y \in C_0$  نامساوی زیر برقرار است.

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2$$



تعداد سوالات : تستی : ۰ تشریحی : ۷ زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۰ تشریحی : ۱۲۰

عنوان درس : آنالیز عددی پیشرفته

رشته تحصیلی / کد درس : ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۸۰

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

نمره ۲۰۰

۱- الف با در نظر گرفتن فرمول خطای نسبی صفحه ۱۳ کتاب مابین خطای ورودی و خطای خروجی و با قرار دادن

$$y = \sum_{i=0}^n a_i \text{ و نامساوی مثلث داریم:}$$

$$|\varepsilon_{\bar{y}}| \leq \left| \frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \right| |\varepsilon_{a_1}| + \dots + \left| \frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i} \right| |\varepsilon_{a_n}|$$

اپسیلون ها همگی کوچکتر از یک هستند در نتیجه حکم ثابت است.

ب. فرمول قسمت الف را استفاده می کنیم و به نامساوی  $|3x - 2| \leq |3x + 2x^2 + 1|$  میرسیم که تحت این شرط پایداری برقرار است.

نمره ۲۰۰

۲- قضیه و مثال ص ۶۳ و ۶۷ کتاب درسی فصل دوم.

نمره ۲۰۰

۳- قضیه ص ۷۶ فصل دوم کتاب درسی

نمره ۲۰۰

۴- الف. قضیه صفحه ۱۰۷ فصل دوم

ب. حل: با توجه به دستگاه صفحه ۱۰۵ کتاب و تعیین گشتاورها در این دستگاه پس از حل تابع درونیاب به صورت زیر بدست می آید

$$S_{\Delta}(x) = \begin{cases} -(x+1)^3 + 2x + 3; [-1,0] \\ (x-1)^3 - 4x + 3; [0,1] \end{cases}$$

نمره ۲۰۰

۵- مثال صفحه ۱۵۴ فصل سوم کتاب درسی

نمره ۲۰۰

۶- قضیه ص ۱۷۵ فصل سوم کتاب درسی

نمره ۲۰۰

۷- قضیه ص ۲۸۴ فصل پنجم کتاب درسی.