

امام خمینی<sup>(ره)</sup>: این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.

\* توجه: بارم سؤال ۴: ۲نمره و بقیه سؤالاها ۳نمره می باشد.

۱. الف. به روش کسر مسلسل، تابع درونیاب گویا برای داده های زیر به دست آورید: (۳ نمره)

$x_i$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1$
$f_i$	$-3$	$-1$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{7}$	$0$

ب. تابع درونیاب اسپلاین طبیعی مکعبی را برای داده های زیر روی بازه  $[0, 2]$  به دست آورید.

$x_i$	$0$	$1$	$\frac{3}{2}$	$2$
$f_i$	$1$	$2$	$1$	$3$

۲. الف. فرض کنید  $\{p_i\}$  دنباله چند جمله ایهای متعامد نسبت به تابع وزن  $w(x)$  روی بازه  $(a, b)$  باشد و  $x_1, \dots, x_n$  نقاط دو به دو متمایز متعلق به  $(a, b)$  باشند. نشان دهید برای هر مجموعه از مقادیر  $y_1, \dots, y_n$  مسئله

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k p_k(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, n$$

درونیاب جواب منحصر به فرد دارد.

ب. اگر در قسمت الف  $x_1, \dots, x_n$  ریشه های چند جمله ای متعامد  $p_n(x)$  باشند و  $a_1, \dots, a_n$  جواب دستگاه

$$\sum_{i=1}^n a_i p_k(x_i) = \begin{cases} (p_0, p_0) & , k = 0 \\ 0 & , k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

معادلات باشند، ثابت کنید روش انتگرالگیری

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$$

دقیق از درجه  $2n-1$  است.  $(p_0, p_0)$  ضرب داخلی  $p_0$  و  $p_0$  است.

۳. فرض کنید تمام ریشه‌های یک چند جمله‌ای  $p_n(x)$  از درجه  $n \geq 2$ ، حقیقی‌اند. ثابت کنید روش نیوتن با هر مقدار اولیه  $x_0$  در طرف راست بزرگترین ریشه به آن ریشه همگراست.

۴. فرض کنید عدد حقیقی  $x$  و عدد صحیح، مثبت و بزرگ  $k$  داده شده باشند. برای محاسبه  $\sin kx$  و  $\cos kx$  از روابط

$$\cos mx = \cos x \cos(m-1)x - \sin x \sin(m-1)x.$$

$$\sin mx = \sin x \cos(m-1)x + \cos x \sin(m-1)x, \quad m = 1, 2, \dots, k$$

تأثیر خطاهای کوچک  $\mathcal{E}_c \cos x$  و  $\mathcal{E}_s \sin x$  در محاسبه  $\sin x$  و  $\cos x$  را بر جوابهای نهائی  $\sin kx$  و  $\cos kx$  بررسی نمائید.

۵. فرض کنید  $A$  ماتریسی نامنفرد و  $b \neq 0$  باشد.

الف. اگر  $x$  جواب دستگاه  $Ax = b$ ،  $(x + \Delta x)$  جواب دستگاه  $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$  باشد، ثابت کنید.

$$\frac{\|\Delta b\|}{\text{cond}(A)\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

ب. اگر  $x$  جواب دستگاه  $Ax = b$ ،  $(x + \Delta x)$  جواب دستگاه  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$  باشد، ثابت کنید

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad \text{با فرض آنکه} \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{(1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|})}$$