

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۲۰۰ نمره

۱- فرض کنید X عدد دلخواه و k عدد صحیح مثبت و بزرگ باشد و اعداد $\sin kx$ و $\cos kx$ را به کمک فرمولهای زیر محاسبه کنیم:

$$\cos mx = \cos x \cos(m-1)x - \sin x \sin(m-1)x$$

$$\sin mx = \sin x \cos(m-1)x + \cos x \sin(m-1)x, m = 1, 2, \dots, k$$

بررسی کنید که چگونه خطاهای کوچک $\epsilon_c \sin x$ و $\epsilon_c \cos x$ در محاسبه $\sin x$ و $\cos x$ و در نهایت روی $\sin kx$ و $\cos kx$ اثر می گذارد.

۲۰۰ نمره

۲- ثابت کنید:

الف. دستگاه معادلات خطی همگن $S^{\mu, \nu}$ همواره دارای یک جواب غیر بدیهی است و برای هر جواب غیر

$$\text{بدیهی } Q^{\mu, \nu} \neq 0 \quad \Phi^{\mu, \nu} = \frac{P^{\mu, \nu}(x)}{Q^{\mu, \nu}(x)} \text{ برقرار است یعنی همه جواب های غیر بدیهی درونیاب}$$

$A^{\mu, \nu}$ گویا هستند.

ب. نقاط اتکای (محمل) یک مسئله درون یاب $A^{\mu, \nu}$ غیر قابل حل در موقعیت ویژه (وضعیت خاص) قرار دارند.

۲۰۰ نمره

۳- ثابت کنید چند جمله ای $P_s(x)$ با شرط $0 \leq s \leq n-1$ یعنی s - قطعه چند جمله ای درون یاب فاز $P(x)$ مجموع زیر را مینیمم می کند:

$$S(q) = \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q(x_k)|^2$$

۲۰۰ نمره

۴- چند جمله ای درون یاب اسپلاین طبیعی نقاط زیر را با شرط $M''(Y, 0) = -6$ به دست آورید:

$$x_0 = -1, y_0 = 1, x_1 = 0, y_1 = 2, x_2 = 1, y_2 = -1$$

۵- فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n ریشه های چند جمله ای متعامد $p_n(x)$ باشد و w_1, w_2, \dots, w_n جواب های دستگاه معادلات غیر تکین (نامنفرد) زیر باشد:

$$\sum_{i=1}^n w_i p_k(x_i) = \begin{cases} (p_0, p_0) & ; k = 0 \\ 0 & ; k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

آنگاه $w_i > 0$ که $(i = 1, 2, \dots, n)$ و

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i) \quad \text{که برای همه } p \in \Pi_{2n-1} \text{ برقرار است.}$$

۶- فرض کنید یک $k, |k| < 1$ وجود دارد به طوری که برای دنباله $\{x_i\}$

$$x_{i+1} - \zeta = (k + \delta_i)(x_i - \zeta), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \delta_i = 0, \quad x_i \neq \zeta$$

برقرار است، آنگاه دنباله ی مقادیر x'_i تعریف شده با رابطه $x'_i = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$ به ازای

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x'_i - \zeta}{x_i - \zeta} = 0 \quad \text{و } i \text{ های به اندازه کافی بزرگ وجود دارد}$$

۷- فرض کنید $p(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی $n \geq 2$ باشد که با ضرایب حقیقی باشد. اگر تمام ریشه

های آن یعنی $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$ حقیقی باشند، آنگاه روش نیوتن به ازای هر مقدار آغازین $\xi_1 \leq X$ بطور نزولی اکیدا همگرا به ξ_1 می باشد.