

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- دو الگوریتم برای محاسبه مقدار $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ بیان کرده و نشان دهید که کدام یک قابل اعتمادتر و پایدار می باشد.

۲- اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبه ی $n+1$ ام باشد، برای هر متغیر \bar{x} یک عدد ζ در کوچکترین بازه $I[x_0, \dots, x_n, \bar{x}]$ وجود دارد که شامل \bar{x} و تمام طول های محمل x_i است، و

$$\omega(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \text{ به طوری که } f(\bar{x}) - P_{01\dots n}(\bar{x}) = \frac{\omega(\bar{x})f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

۳- نشان دهید، برای هر $p = 1, 2, \dots$ رابطه زیر برقرار است، همچنین فرض کنید $\rho(x_0, \dots, x_{p-2}) = 0$ برای $p = 1$

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_p) = \rho(x_0, \dots, x_p) - \rho(x_0, \dots, x_{p-2})$$

۴- نشان دهید که دستگاه معادلات خطی زیر به ازای هر افراز Δ از a و b دارای جواب منحصر بفرد (یا ماتریس ضرایب نامنفرد) است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \mu_3 & & \\ \vdots & & & \\ & & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

۵- ثابت کنید، اگر $f \in C^{2n}[a, b]$ ، آنگاه

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} (p_n, p_n)$$

برای $\zeta \in (a, b)$



۶- اگر $Df(x)$ برای هر x در ناحیه y محدب $C_0 \subseteq R^n$ وجود داشته باشد و ثابت γ داشته باشیم که
 $\forall x, y \in C_0, \|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$ ، آنگاه برای هر $x, y \in C_0$ ثابت کنید رابطه زیر برقرار است.

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2$$

۷- فرض کنید $p(x)$ یک چند جمله ای از درجه $n \geq 2$ با ضرایب حقیقی باشد. اگر تمام ریشه های ζ_i که
 $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_n$ از چند جمله ای $p(x)$ حقیقی باشند، آنگاه برای هر مقدار آغازین $x_0 > \zeta_1$ روش
 نیوتن برای هر دنباله اکیدا کاهشی x_k همگرا به ζ_1 خواهد شد.