



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: نظریه حلقه و مودول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۷

۱- کدام گزاره درست است؟

۱. حلقه تقسیم ناجابجایی حوزه صحیح است.  
۲. میدان یک حوزه صحیح است.  
۳. حلقه چهارگانی حقیقی حوزه صحیح است.  
۴. حلقه ماتریس ها یک حوزه صحیح است.

۲- کدام حلقه حوزه صحیح نیست؟

۱.  $\mathbb{Z}$       ۲.  $\mathbb{Z}_{13}$       ۳.  $\mathbb{Q}$       ۴.  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$

۳-  $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$  یعنی مجموعه ماتریس های ۲ در ۲ روی حلقه اعداد صحیح  $\mathbb{Z}$  با عمل جمع و ضرب ماتریس ها:

۱. حلقه تقسیم است.      ۲. حلقه ناجابجایی است.      ۳. حلقه ساده است.      ۴. حوزه صحیح است.

۴-  $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}$  چه تعداد ایده آل ماکسیمال دارد؟

۱. ۴      ۲. ۳      ۳. ۲      ۴. ۱

۵- کدام حلقه زیر حوزه ایده آل اصلی نمی باشد؟

۱.  $\mathbb{Z}[x]$       ۲.  $\mathbb{Q}[x]$       ۳.  $\mathbb{Z}_{-1}[x]$       ۴.  $\mathbb{C}[x]$

۶- حاصل  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} + {}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  و  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \cap {}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  به ترتیب برابر است با

۱.  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  و  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$       ۲.  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  و  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$       ۳.  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  و  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$       ۴.  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  و  ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$

۷-  $Spec(\mathbb{Z})$  چند عضوی است؟

۱. ۰      ۲. ۱      ۳. ۲      ۴.  $\infty$

۸- حلقه های  $\mathbb{Q}[x]$  و  $\mathbb{Q}[xy]$  به ترتیب ..... و ..... هستند.

۱. میدان - میدان      ۲. میدان - حوزه صحیح      ۳. حوزه صحیح - میدان      ۴. حوزه صحیح - حوزه صحیح



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۷

۹-  $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}$  با کدام میدان زیر یکرخت است؟

۴.  $\mathbb{R}[\sqrt{2}]$

۳.  $\mathbb{Q}[i]$

۲.  $\mathbb{R}$

۱.  $\mathbb{C}$

۱۰- کدام گزینه درست می باشد؟

۴.  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

۳.  $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

۲.  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

۱.  $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

۱۱- اگر  $a/s = s^{-1}a$  آنگاه:

۲.  $t \in S$  وجود دارد به قسمی که  $ta = a$

۱.  $t \in R$  وجود دارد به قسمی که  $ta = a$

۴.  $t \in S$  وجود دارد به قسمی که  $ts = a$

۳.  $t \in R$  وجود دارد به قسمی که  $ts = a$

۱۲- عناصر منظم حلقه  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  برابرند با:

۲.  $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | ab = 0\}$

۱.  $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | ab \neq 0\}$

۴.  $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | ab \neq \pm 1\}$

۳.  $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | ab = \pm 1\}$

۱۳- در حلقه  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  در مورد عنصر ۳ چه می توان گفت.

۲. تحویل ناپذیر است و اول نیست.

۱. تحویل ناپذیر است و اول است.

۴. تحویل ناپذیر نیست و اول نیست.

۳. تحویل ناپذیر نیست و اول است.

۱۴- کدام رابطه درست است؟

۲.  $\text{حوزه اقلیدسی} \Rightarrow \text{PID} \Rightarrow \text{UFD}$

۱.  $\text{حوزه اقلیدسی} \Rightarrow \text{PID} \Rightarrow \text{UFD}$

۴.  $\text{حوزه اقلیدسی} \Rightarrow \text{PID} \Rightarrow \text{UFD}$

۳.  $\text{حوزه اقلیدسی} \Rightarrow \text{PID} \Rightarrow \text{UFD}$



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۷

۱۵- اگر  $M$  یک  $R$ -مدول راست یکانی باشد آنگاه:۱. برای هر  $m \in M$  داریم  $m \cdot 1_R = m$  .۲. برای هر  $m \in M$  داریم  $m \cdot 1_R = m$  .۳. برای هر  $r \in R$  داریم  $r \cdot 1_M = r$  .۴. برای هر  $r \in R$  داریم  $r \cdot 1_M = r$  .

۱۶- کدام گزینه ناصفر است؟

۱.  $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q})$  .۲.  $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$  .۳.  $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  .۴.  $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$  .۱۷- تعداد اعضای  $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_7, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  برابر است با:

۱. ۰

۲. ۱

۳. ۲

۴. ۳

۱۸-  $R[x]$  به عنوان  $R[x]$ -مدول در کدام گزینه صدق می کند.

۱. آزاد است با پایه تک عضوی.

۲. آزاد است با پایه  $n$  عضوی  $(n > 1)$  .

۳. آزاد است با پایه نامتناهی.

۴. آزاد نیست.

۱۹-  $M$  به عنوان  $R$ -مدول آزاد و متناهی البعد باشد آنگاه روی زیرمدول هایش۱. دو شرط  $acc$  و  $dcc$  برقرار است.۲. تنها شرط  $dcc$  برقرار است.۳. تنها شرط  $acc$  برقرار است.

۴. هیچکدام از دو شرط برقرار نیست.

۲۰- در  $\mathbb{Z}(p^\infty)$  به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول۱. دو شرط  $acc$  و  $dcc$  برقرار است.۲. تنها شرط  $dcc$  برقرار است.۳. تنها شرط  $acc$  برقرار است.

۴. هیچکدام از دو شرط برقرار نیست.



زمان آزمون (دقیقه): ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۷

## سوالات تشریحی

نمره ۰،۸۸

۱- الف: یک حلقه مثال بزنید که حوزه صحیح باشد ولی حوزه اقلیدسی نباشد. (اثبات لازم نیست)

ب: یک حلقه مثال بزنید که حوزه تجزیه یکتا باشد ولی حوزه ایده آل اصلی نباشد. (اثبات لازم نیست)

ج: یک حلقه مثال بزنید که حوزه ایده آل اصلی باشد ولی حوزه اقلیدسی نباشد. (اثبات لازم نیست)

نمره ۱،۷۵

۲- قضیه اول یکرختی برای مدول ها را بیان و ثابت کنید.

نمره ۰،۸۸

۳- اگر  $M$  یک مدول راست روی حلقه جابجایی و یکدار  $R$  باشد. نشان دهید  $\text{Hom}_R(R, M)$  یک  $R$ -مدول راست یکانی است و

$$\text{Hom}_R(R, M) \cong M.$$

نمره ۲،۶۲

۴- نشان دهید هر مدول تصویر همریخت یک مدول آزاد است.

نمره ۰،۸۷

۵- فرض کنید  $R$  یک حلقه یکانی و نابدی و  $M$  یک  $R$ -مدول یکانی باشد. عبارات زیر معادلند.

$$(الف) \quad M = 0;$$

$$(ب) \quad \text{برای هر ایده آل اول } p \text{ از } R, \quad M_p = 0; \text{ و}$$

$$(ج) \quad \text{برای هر ایده آل ماکسیمال } m \text{ از } R, \quad M_m = 0.$$