



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۳۸۷

۱- تعداد مقسوم علیه های صفر حلقه \mathbb{Z}_p برابر است با

۱. ۷ ۲. ۸ ۳. ۶ ۴. ۵

۲- کدام یک از حلقه های زیر حوزه ایده آل اصلی نیست؟

۱. $\mathbb{Q}[x]$ ۲. $\mathbb{Z}_p[x]$ ۳. $\mathbb{R}[x]$ ۴. $\mathbb{C}[x]$

۳- حلقه چند جمله ای های $\mathbb{Z}[x, y]$ را در نظر بگیرید. در این صورت ایدآل (x)

۱. اول است ولی ماکسیمال نیست. ۲. ماکسیمال است اما اول نیست.
۳. اول نیست. ۴. نه اول و نه ماکسیمال است.

۴- حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}}$ با کدام یک از حلقه های زیر یکرخت است؟

۱. \mathbb{Z}_6 ۲. \mathbb{Z}_p ۳. \mathbb{Z}_p ۴. \mathbb{Z}_i

۵- تعداد هم ریختی ها از حلقه اعداد صحیح \mathbb{Z} به خودش برابر است با:

۱. ۲ ۲. ۰ ۳. بی شمار ۴. ۱

۶- فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. در این صورت $S^{-1}R = 0$ اگر و فقط اگر

۱. $0 \in S$ ۲. $0 \notin S$ ۳. $S = R$ ۴. $S \neq R$

۷- کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

۱. هر حوزه اقلیدسی، یک حوزه ایدآل اصلی است. ۲. هر حوزه ایدآل اصلی، یک حوزه اقلیدسی است.
۳. هر حوزه تجزیه یکتا، یک حوزه ایدآل اصلی است. ۴. هر حوزه تجزیه یکتا، یک حوزه اقلیدسی است.

۸- فرض کنیم R یک حلقه، M یک R -مدول و N و K دوزیر مدول از M باشد. در این صورت $Ann_R(N + K)$ برابر است با

۱. $Ann_R(N) + Ann_R(K)$ ۲. $Ann_R(N) \cap Ann_R(K)$

۳. $Ann_R(N) \cup Ann_R(K)$ ۴. ۰

۹- حلقه $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ با کدام یک از حلقه های زیر یکرخت است؟

۱. \mathbb{Z}_{pq} ۲. \mathbb{Z}_{p^2} ۳. \mathbb{Z}_{pq} ۴. \mathbb{Z}_{p^2}



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۳۸۷

۱۰- \mathbb{Z} - مدول $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ با کدام یک از مدول های زیر یکرخت است؟

۱. \mathbb{Q} ۲. \mathbb{Z} ۳. 0 ۴. $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

۱۱- کدام یک از گروه های آبدی زیر به عنوان \mathbb{Z} -مدول آزاد هستند.

۱. \mathbb{Q} ۲. \mathbb{R} ۳. \mathbb{Z}_p ۴. \mathbb{Z}

۱۲- فرض کنیم M یک R -مدول باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. M تصویر همریخت یک R -مدول آزاد است. ۲. M زیر مدول یک R -مدول آزاد است.
۳. M تصویر همریخت هر R -مدول آزاد است. ۴. M یکرخت با یک R -مدول آزاد است.

۱۳- فرض کنیم P یک عدد اول باشد. زیر مدول \mathbb{Z}_{p^∞} از \mathbb{Z} -مدول $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. \mathbb{Z}_{p^∞} نوتری است ولی آرتینی نیست. ۲. \mathbb{Z}_{p^∞} آرتینی است ولی نوتری نیست.
۳. \mathbb{Z}_{p^∞} هم نوتری است هم آرتینی است. ۴. \mathbb{Z}_{p^∞} نه نوتری است نه آرتینی است.

۱۴- فرض کنید R یک حلقه جابجایی، یکدار و نوتری و M یک R -مدول یکانی باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. M نوتری است. ۲. M به طور متناهی تولید شده است.
۳. M نوتری است اگر به طور متناهی تولید شده باشد. ۴. M نوتری است اگر M یک R -مدول آزاد باشد.

۱۵- \mathbb{Q} را به عنوان \mathbb{Z} -مدول در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. \mathbb{Q} نوتری است ولی آرتینی نیست. ۲. \mathbb{Q} آرتینی است ولی نوتری نیست.
۳. \mathbb{Q} هم نوتری و هم آرتینی است. ۴. \mathbb{Q} نه نوتری و نه آرتینی است.

۱۶- فرض کنیم S یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه یکدار R و L و N زیر مدول هایی از R -مدول یکانی M باشند. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. $S^{-1}(L+N) = S^{-1}L + S^{-1}N$ ۲. $S^{-1}(L \cap N) = S^{-1}L \cap S^{-1}N$

۳. $S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \cong \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$ ۴. $S^{-1}(M) = 0 \Rightarrow M = 0$



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۳۸۷

۱۷- در حلقه R عنصر a منظم است اگر و فقط اگر

۱. $a \neq 0$ ۲. a مقسوم علیه صفر نباشد.
۳. $a \neq 1$ ۴. a یکه باشد.

۱۸- فرض کنید در حلقه جابجایی و یکدار R عنصر $p \in R$ چنان باشد که اگر $p \mid ab$ آنگاه $p \mid a$ یا $p \mid b$. در این صورت

۱. P اول است. ۲. اگر P ناصفر و نایکه باشد P اول است.
۳. اگر P ناصفر باشد P اول است. ۴. P تحویل ناپذیر است.

۱۹- فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار و M یک R -مدول باشد. اگر برای هر ایده آل ماکسیمال m از R ، $M_m = 0$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. $M = 0$ ۲. $m = 0$ ۳. $m = M$ ۴. چیزی نمی توان گفت.

۲۰- حلقه \mathbb{Z}_6 را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. $2\mathbb{Z}_6 + 3\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6$ ۲. $2\mathbb{Z}_6 \cap 3\mathbb{Z}_6 = \{0\}$ ۳. $2\mathbb{Z}_6 \oplus 3\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6$ ۴. $2\mathbb{Z}_6 \cup 3\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6$

۲۱- فرض کنید I ایدآلی از حلقه جابجایی و یکدار R و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد به طوری که $S \cap I \neq \emptyset$ در این صورت

۱. $I = R$ ۲. $I \neq R$ ۳. $S^{-1}R = S^{-1}I$ ۴. $S^{-1}R \neq S^{-1}I$

۲۲- فرض کنید \mathbb{Z} حلقه اعداد صحیح و S مجموعه اعداد صحیح ناصفر باشد. در این صورت $S^{-1}\mathbb{Z}$ برابر است با

۱. \mathbb{Q} ۲. زیرحلقه ای از \mathbb{Q} شامل تمام کسرهای با مخرج زوج.
۳. ایده آلی از \mathbb{Q} شامل تمام کسرهای با مخرج فرد. ۴. ایده آلی از \mathbb{Q} شامل تمام کسرهای با مخرج زوج.

۲۳- فرض کنید R یک حلقه و N و K زیرمدول هایی از R -مدول M باشند به طوری که $N \cap K = \{0\}$. در این صورت مدول $\frac{N+K}{N}$ با کدام یک از مدول های زیر یکرخت است؟

۱. $\{0\}$ ۲. $N \cap K$ ۳. N ۴. K

۲۴- کدام گزینه در مورد ایده آل $6\mathbb{Z}$ درست است؟

۱. $6\mathbb{Z}$ یک ایده آل اول است ۲. $6\mathbb{Z}$ یک ایده آل ماکسیمال است
۳. $6\mathbb{Z}$ یک ایده آل اول است اما ماکسیمال نیست ۴. $6\mathbb{Z}$ نه اول و نه ماکسیمال است



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۳۸۷

۲۵- فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه های یکدار باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $f(1_R) = 1_S$.

۲. $f(1_R) = 1_S$ در صورتی که f یک به یک باشد.

۳. $f(1_R) = 1_S$ در صورتی که f پوشا باشد.

۴. $f(1_R) = 1_S$ در صورتی که S حوزه صحیح باشد.

سوالات تشریحی۱- فرض کنید I ایده آلی از حلقه جابجایی و یکدار R و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد.الف) نشان دهید که $S^{-1}I = S^{-1}R$ اگر و تنها اگر $S \cap I \neq \emptyset$.ب) اگر P اید آل اولی از R باشد که $P \cap S = \emptyset$ و عناصر $a \in R$ و $s \in S$ چنان باشند به طوری که

$$\frac{a}{s} \in S^{-1}P, \text{ آنگاه } a \in P.$$

۲- اولین قضیه یکرختی مدول ها را بیان و اثبات کنید.

۳- فرض کنیم M یک مدول روی حلقه یکدار R باشد. ثابت کنید یک R -مدول آزاد F و یک R -همریختی پوشای $f: F \rightarrow M$ وجود دارد.

۴- ثابت کنید که هر حوزه ایده آل اصلی (PID)، یک حلقه نوتری است.