

۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱. مرکز یک حلقه یک زیر حلقه ی آن است.
۲. برای هر عدد اول  $p$ ،  $Z_p$  یک میدان است.
۳. در حلقه ی  $Z_n$  برای  $n \geq 2$  عنصر  $\bar{a}$  یک مقسوم علیه صفر است اگر و فقط اگر  $(a, n) = 1$  باشد.
۴. حلقه ی اعداد صحیح  $Z$  یک حوزه صحیح است.

۲- کدام گزینه درست است؟

۱. هر حوزه صحیح متناهی یک میدان است.
۲. هر حلقه تقسیم یک میدان است.
۳. هر حوزه صحیح جابجایی یک میدان است.
۴.  $Z_n$  یک حوزه صحیح است.

۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱. هر ایدال از یک حلقه یک زیر حلقه است.
۲.  $Z$  یک ایدال  $Q$  است.
۳. هر ایدال  $Z$  به شکل  $nZ$  است.
۴. همه ی ایدالهای  $Z$  ایدال اصلی هستند.

۴- در حلقه  $Z$  ایدال  $6Z \cap 8Z$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $12Z$
۲.  $2Z$
۳.  $4Z$
۴.  $24Z$

۵- کدام گزینه درست است؟

۱. هر ایدال اول یک ایدال ماکسیمال است.
۲. اگر  $P$  یک ایدال اول حلقه  $R$  باشد آنگاه  $\frac{R}{P}$  یک میدان است.
۳.  $Z_4$  یک حوزه صحیح است.
۴. اگر  $P$  یک ایدال اول حلقه جابجایی و یکدار  $R$  باشد آنگاه  $\frac{R}{P}$  یک حوزه صحیح است.

۶- هر حلقه جابجایی و یکدار  $R$  دارای حداقل .... است.

۱. دو عضو یکه
۲. یک ایدال ماکسیمال
۳. یک مقسوم علیه ناصفر
۴. دو ایدال سره

۷- هر همریختی پوشا از حلقه ها را .... می نامند.

۱. یکرختی      ۲. تکرختی      ۳. برورختی      ۴. تناظر یک به یک

۸- حلقه خارج قسمتی  $\frac{R[x]}{(x^2+1)}$  با کدام حلقه یکرخت است؟

۱.  $R$       ۲.  $C[x]$       ۳.  $R[x]$       ۴.  $C$  (حلقه اعداد مختلط)

۹- نگاشت  $f: Z \times Z \rightarrow Z$  را با ضابطه  $f(m, n) = m$  به ازای هر  $(m, n) \in Z \times Z$  در نظر بگیرید. در این صورت

۱.  $f$  یکرختی حلقه هاست      ۲.  $f$  تکرختی حلقه هاست  
۳. هسته  $f$  برابر  $Z$  است      ۴. هسته  $f$  برابر  $\{0\} \times Z$  است

۱۰- یک حلقه جابجایی و یکدار را که تنها یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد را ..... می نامند.

۱. حلقه کسرها      ۲. حلقه تقسیم      ۳. حلقه موضعی      ۴. میدان

۱۱- فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار و  $S$  یک زیر مجموعه ضربی بسته از  $R$  باشد. در این صورت  $S^{-1}R = 0$  اگر و فقط اگر

۱.  $0 \notin S$       ۲.  $0 \in S$       ۳.  $R \cap S = \emptyset$       ۴.  $R \cap S \neq \emptyset$

۱۲- فرض کنید که  $P$  عنصر ناصفر از حوزه صحیح  $R$  باشد.  $P$  اول است اگر و فقط اگر  $(p)$  یک ..... باشد.

۱. ایدآل ماکسیمال      ۲. ایدآل اول ناصفر  
۳. ایدآل سره      ۴. ایدآل اصلی ماکسیمال

۱۳- فرض کنید که  $X$  یک زیر مجموعه از  $R$ -مدول  $M$  باشد. زیر مدول تولید شده توسط  $X$  .... است.

۱. کوچکترین زیر مدول  $M$  است که شامل  $X$  می باشد.      ۲. بزرگترین زیر مدول  $M$  است که شامل  $X$  می باشد.  
۳. به طور متناهی تولید شده      ۴. یک زیر مدول دوری

۱۴- فرض کنید که  $R$  یک حلقه و  $M$  و  $N$  دو  $R$ -مدول و  $f: M \rightarrow N$  همریختی  $R$ -مدولها باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $Ker(f)$  یک زیر مدول از  $M$  است.

۲.  $Im f$  یک زیر مدول از  $N$  است.

۳.  $f$  یک به یک است اگر و فقط اگر  $Ker(f) = 0$  باشد.

$$4. \frac{M}{Ker(f)} \cong N$$

۱۵-  $Hom_Z(Z_n, Z)$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $Z$

۲.  $\{0\}$

۳.  $Z_n$

۴. تهی است.

۱۶- کدام گزینه یک مدول آزاد نیست؟

۱.  $R^n$  به عنوان  $R$ -مدول که در آن  $R$  حلقه ای یکدار است.

۲. فضای برداری  $V$  روی یک میدان  $K$

۳. گروه آبلی متناهی  $G$  از مرتبه  $n > 1$  به عنوان یک  $Z$ -مدول

۴. حلقه چند جمله ایهای  $R[x]$  به عنوان  $R$ -مدول به طوری که  $R$  یک حلقه ای یکدار است.

۱۷- فرض کنید که  $M$  مدولی یکانی روی حلقه ای جابجایی و یکدار  $R$ ،  $N$  و  $L$  زیر مدولهایی از  $M$  و  $S$  زیر مجموعه بسته ضربی از  $R$  باشد. کدام گزینه نادرست است؟

$$2. S^{-1}(L \cap N) = S^{-1}L \cap S^{-1}N$$

$$1. S^{-1}(L + N) = S^{-1}L + S^{-1}N$$

$$4. \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N} \cong S^{-1} \frac{M}{N}$$

$$3. S^{-1}(L \cup N) = S^{-1}L \cup S^{-1}N$$

۱۸- فرض کنید که  $M$  مدولی یکانی و به طور متناهی تولید شده روی حلقه ای جابجایی و یکدار  $R$  و  $S$  زیر مجموعه بسته ضربی از  $R$  باشد. کدام گزینه درست است؟

$$2. S^{-1}Ann_R(M) = Ann_R(S^{-1}M)$$

$$1. S^{-1}Ann_R(M) = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$$

$$4. S^{-1}Ann_R(M) = Ann_{S^{-1}R}(M)$$

$$3. S^{-1}Ann_R(M) = Ann_R(M)$$



زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: نظریه حلقه و مدول

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۳۸۷

۱۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱. هر تصویر همریخت از یک  $R$  - مدول نوتری هم چنین نوتری است.۲. هر تصویر همریخت از یک  $R$  - مدول آرتینی هم چنین آرتینی است.۳.  $Z$  به عنوان یک  $Z$  - مدول نوتری است.۴.  $Z$  به عنوان  $Z$  - مدول آرتینی است.۲۰-  $Q$  به عنوان یک  $Z$  - مدول در کدام گزینه صدق می کند؟

۱. نوتری است ولی آرتینی نیست.

۲. نوتری نیست ولی آرتینی است.

۳. هم نوتری و هم آرتینی است.

۴. نه نوتری و نه آرتینی است.

## سوالات تشریحی

۱- فرض کنید  $P$  یک ایدآل از حلقه ی جابجایی و یکدار  $R$  باشد. ثابت کنید که  $P$  یک ایدآل اول است اگر و فقط اگر  $\frac{R}{P}$  یک حوزه صحیح باشد.

۲- فرض کنید که  $I$  و  $J$  دو ایدآل از حلقه ی  $R$  باشند که  $I \subseteq J$  است. در این صورت ثابت کنید که  $\frac{R/I}{J/I} \cong \frac{R}{J}$

۳- قضیه اول یکرختی مدول ها را بیان و اثبات کنید

۴- فرض کنید که  $S$  یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه ی یکدار  $R$  باشد و  $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$  یک رشته دقیق از  $R$  - مدولهای یکانی و  $R$  - همریختی ها باشد. ثابت کنید که رشته زیر دقیق است

$$S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$$

۵- ثابت کنید که هر حوزه ایدآل اصلی، یک حلقه نوتری است.