

امام خمینی<sup>(ع)</sup>: این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.

۱. در یک جامعه نرمال با نمونه‌ای به حجم  $n$  می‌توان میانگین جامعه را با  $\bar{Y}_n$  و  $\tilde{Y}_n$  (میانۀ) برآورد کرد. فرض کنید واریانس

جامعه  $\sigma^2$  باشد. اگر  $var(\tilde{Y}_n) = \frac{\pi\sigma^2}{\pi n}$  باشد کارایی  $\bar{Y}_n$  نسبت به  $\tilde{Y}_n$  چقدر است؟

الف. ۱/۵۷ ب. ۰/۶۴ ج.  $\pi$  د.  $\frac{\sigma}{\pi}$

۲. اگر  $\hat{\theta}$  برآورد کننده اریب با اندازه اریبی  $B$  برای  $\theta$  باشد کدام رابطه زیر درست می‌باشد؟

الف.  $MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + B$  ب.  $MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + B^2$

ج.  $MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) - B$  د.  $MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) - B^2$

۳. اگر  $C$  ضریب تغییرات جامعه باشد ضریب تغییرات  $\bar{Y}_n$  حاصل از نمونه  $n$  تایی چقدر است؟

الف.  $\sqrt{n}$  برابر ضریب تغییرات جامعه ب.  $n$  برابر ضریب تغییرات جامعه

ج.  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  برابر ضریب تغییرات جامعه د.  $\frac{1}{n}$  برابر ضریب تغییرات جامعه

۴. از جامعه‌ای به حجم  $N$  نمونه‌ای به اندازه  $n$  انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب یک عضو مشخص در انتخاب  $r$  ام چقدر است؟

الف.  $\frac{N-r}{N}$  ب.  $\frac{1}{N}$  ج.  $\frac{1}{N-r}$  د.  $\frac{1}{N+1-r}$

۵. از جامعه‌ای به حجم  $N = 5$  نمونه‌ای به اندازه  $n = 3$  بدون جایگذاری انتخاب کرده و مقدار  $S^2 = 13$  بدست آمده است.

مقدار  $var(\bar{y}_n)$  چقدر است؟

الف.  $\frac{15}{36}$  ب.  $\frac{26}{15}$  ج.  $\frac{13}{5}$  د.  $\frac{13}{3}$

۶. فرض کنید در نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری از جامعه‌ای به حجم  $N = 100$ ،  $var(\bar{y}_n) = 9$  بدست آمده است. مقدار

$\hat{\sigma}^2(t_N)$  چقدر است؟

الف. ۹۰۰ ب. ۹۰۰۰۰ ج. ۳۰۰ د. ۳۰۰۰

۷. واریانس میانگین نمونه تصادفی ساده با جایگذاری کدام است؟ ( $N$  حجم جامعه،  $n$  حجم نمونه)

الف.  $\frac{\sigma^2}{n}$  ب.  $(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}) \frac{S^2}{n}$

ج.  $\frac{N-1}{N} \sigma^2$  د.  $\frac{n}{N} \sigma^2$

۸. نمونه‌ای به اندازه  $n = 100$  خانواده را در شهر تهران به تصادف انتخاب کرده‌ایم و دریافته‌ایم که  $a = 60$  خانواده با پیشنهاد خصوصی کردن دانشگاهها مخالف‌اند. حد بالای فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت تهرانیهای مخالف خصوصی کردن دانشگاهها چقدر است؟ ( $Z_{0.025} = 1.96$ )

الف. ۰/۷۹۱ ب. ۰/۵۰۳ ج. ۰/۵۸۴ د. ۰/۶۹۶

۹. از جامعه دو متغیره  $(X, Y)$  به حجم  $N = 100$  نمونه‌ای به اندازه  $n = 10$  زوج انتخاب کرده و  $S_{XY} = 150$  به دست آمده است. مقدار  $cov(\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$  چقدر است؟

الف. ۱۸/۴۸ ب. ۱۳/۵ ج. ۱۲/۲ د. ۱۵/۷۵

۱۰. در کدامیک از حالت‌های زیر از روش نمونه‌گیری طبقه‌بندی استفاده می‌کنیم؟

الف. جامعه به گروه‌های تقسیم شده است که پراکندگی داخل گروه‌ها برابر پراکندگی در کل جامعه است.

ب. جامعه به گروه‌های تقسیم شده است که پراکندگی داخل گروه‌ها کمتر از پراکندگی در کل جامعه است.

ج. جامعه به گروه‌های تقسیم شده است که پراکندگی داخل گروه‌ها بیشتر از پراکندگی در کل جامعه است.

د. جامعه به گروه‌های تقسیم شده است که پراکندگی داخل گروه‌ها بیشتر و یا کمتر از پراکندگی در کل جامعه است.

۱۱. فرض کنید جامعه‌ای به سه طبقه تقسیم شده که به ترتیب دارای ۱۰ و ۸ و ۹ عضو می‌باشد. به چند طریق می‌توان نمونه‌هایی به ترتیب ۴، ۲ و ۳ تایی انتخاب کرد؟

الف. ۲۵۱۹۸۶ ب. ۸۸۱۷۴۵ ج. ۱۸۷۵۱۰ د. ۴۹۳۹۲۰

۱۲. در نمونه‌گیری به روش طبقه‌بندی اگر  $V_{opt}$  و  $V_{prop}$  به ترتیب نشانگر واریانس به روش ایتیم و واریانس به روش

متناسب باشد به شرط قابل اغماض بودن  $\frac{1}{N_h}$  کدام رابطه زیر درست می‌باشد؟ ( $V_{rand}$  نشانگر واریانس به طریق تصادفی ساده می‌باشد).

الف.  $V_{prop} \leq V_{opt} \leq V_{rand}$  ب.  $V_{prop} \leq V_{rand} \leq V_{opt}$

ج.  $V_{opt} \leq V_{prop} \leq V_{rand}$  د.  $V_{opt} \leq V_{rand} \leq V_{prop}$

۱۳. جامعه‌ای به سه طبقه تقسیم شده است به طوری که حجم طبقات  $N_1 = 180$ ،  $N_2 = 120$  و  $N_3 = 300$  و واریانس طبقات

$\sigma_1^2 = \frac{229}{3}$ ،  $\sigma_2^2 = \frac{238}{15}$  و  $\sigma_3^2 = \frac{179}{5}$  می‌باشد. تغییرات طبقه سوم چقدر است؟

الف. ۴ ب. ۱۶ ج. ۶ د. ۳۶

۱۴. از جامعه‌ای که به دو طبقه تقسیم شده است می‌خواهیم نمونه‌ای به اندازه ۱۰۰ انتخاب کنیم. اگر داشته باشیم

$C_1 = 9$ ،  $N_1 S_1 = 480$  و  $C_2 = 16$ ،  $N_2 S_2 = 1080$  مقدار نمونه‌ای که از طبقه دوم انتخاب می‌شود چقدر است؟

الف. ۶۳ ب. ۷۵ ج. ۲۹ د. ۳۸

۱۵. در شهری که به سه طبقه تقسیم شده است اطلاعات زیر بر حسب خانوارها به دست آمده است. اگر بخواهیم نمونه‌ای به اندازه  $n$  انتخاب کنیم نسبت نمونه‌های که از طبقه  $C$  انتخاب می‌شود کدام گزینه است؟

شهر	خانواده	$P_n$
A	۲۰۰۰	۰/۱
B	۳۰۰۰	۰/۱۵
C	۵۰۰۰	۰/۲

الف.  $\frac{۲۱}{۷۳}n$  ب.  $\frac{۴۰}{۷۳}n$

ج.  $\frac{۱۲}{۷۳}n$  د.  $\frac{۱۵}{۷۳}n$

۱۶. در نمونه‌گیری با احتمال متغیر به روش لاهیری احتمال غیرمؤثر بودن زوج  $(i, j)$  چقدر است؟

$(M = \max(X_1, \dots, X_N))$

الف.  $\frac{\bar{X}_N}{M}$  ب.  $\frac{M}{\bar{X}}$  ج.  $1 - \frac{\bar{X}_N}{M}$  د.  $1 - \frac{M}{\bar{X}}$

۱۷. در نمونه‌گیری با احتمال متغیر اگر داشته باشیم  $P_i = \frac{1}{N}$  آنگاه این روش نمونه‌گیری به کدام روش نمونه‌گیری تبدیل می‌شود؟

الف. تصادفی ساده با جایگذاری ج. طبقه بندی اپتیمم  
ب. تصادفی ساده بدون جایگذاری د. طبقه بندی متناسب

۱۸. در نمونه‌گیری با احتمال متغیر اگر انتخاب  $Y_i$  متناسب با  $P_i$  باشد یعنی  $P_i = \frac{Y_i}{\sum_{i=1}^N Y_i}$  با توجه به رابطه  $Z_i = \frac{Y_i}{NP_i}$  مقدار

$\sigma_Z^2$  چقدر می‌شود؟

الف. ۱ ب. صفر ج.  $\frac{n}{N} \sigma_Y^2$  د.  $\frac{n}{N-n} \sigma_Y^2$

۱۹. نمونه‌ای به اندازه  $n = ۱۰$  از جامعه‌ای به اندازه  $N = ۱۰۰۰$  به روش احتمال متغیر با جایگذاری انتخاب می‌کنیم اگر  $\sigma_Z^2$  نشانگر واریانس  $Z_i$ ها باشد آنگاه  $var(\hat{\bar{Y}}_N)$  کدام گزینه است؟

الف.  $\frac{\sigma_Z^2}{n}$  ب.  $\frac{N-n}{n} \sigma_Z^2$  ج.  $\frac{n}{N} \sigma_Z^2$  د.  $\sigma_Z^2$

۲۰. در نمونه‌گیری با احتمال متغیر و بدون جایگذاری اگر  $P_{ir}$  نشانگر احتمال انتخاب  $Y_i$  در  $r$  امین استخراج باشد ( $r = 1, \dots, N$ ) چه موقع  $P_{i1} = P_{i2}$  می‌شود؟

الف.  $P_i = \frac{r}{N-1}$  ب.  $P_i = \frac{1}{N}$  ج.  $P_i = \frac{r-1}{N}$  د.  $P_i = \frac{r-1}{N-1}$

سؤالات تشریحی

۱. از جامعه‌ای به حجم  $N$ ، نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم  $n$  را انتخاب می‌کنیم. اگر  $y_i$  و  $y_j$  دو واحد مشخص

نمونه در دو انتخاب متوالی نمونه باشند و  $\sigma^2$  واریانس جامعه فرض شود، ثابت کنید  $\text{COV}(y_i, y_j) = \frac{-\sigma^2}{N-1}$ . (نمره ۱)

۲. مدیر یک مرغداری می‌خواهد وزن کل  $N = 1000$  جوجه ۴ هفته‌ای را برآورد کند. چه تعدادی از جوجه‌ها را باید به تصادف انتخاب کند تا فاصله اطمینان ۹۵٪ به اندازه ۲۰۰ کیلوگرم باشد. مطالعه‌های مشابهی که با شرایط مشابه در گذشته انجام شده است حاکی از آن است که تغییرات جامعه وزن‌ها تقریباً  $\frac{1}{2}$  کیلوگرم است (کسر نمونه‌گیری قابل اغماض است). ( $t = 1/96$  جدول) ( $1/25$ ) (نمره)

۳. در نمونه‌گیری با طبقه‌بندی برای نسبت‌ها نشان دهید که: (۲/۲۵ نمره)

الف. واریانس برآورد کننده نسبت  $P_{st}$  عبارت است:

$$V(P_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{(N_h - n_h)(P_h \cdot Q_h)}{N_h - 1} \frac{1}{n_h}$$

ب. اگر  $f_{PC}$  قابل اغماض باشد

$$V(P_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{P_h \cdot Q_h}{n_h}$$

ج. اگر تخصیص متناسب  $(\frac{N_h}{N} = \frac{n_h}{n})$  باشد

$$V(P_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2}{N_h - 1} (N - n) \frac{n_h}{n} \frac{P_h \cdot Q_h}{n_h}$$

۴. در یک بررسی جمعیت‌شناسی از روستاهای یک استان از روش نمونه‌گیری تصادفی با طبقه‌بندی استفاده می‌شود. هر شهرستان یک طبقه منظور می‌شود. اگر هزینه جمع‌آوری اطلاعات برای هر واحد ۱۰ باشد و هزینه‌های اداری و غیره روی هم ۱۰۰۰۰۰ باشد اندازه اُپتیمم  $n$ ، حجم نمونه را طوری بیابید که واریانس میانگین نمونه دارای کوچکترین مقدار باشد. هزینه کل پیش‌بینی شده برای این بررسی ۸۰۰۰۰۰ است. اطلاعات حاصل در جدول زیر آمده است. با این اطلاعات حجم نمونه هر طبقه را تعیین کنید. (۱/۵ نمره)

طبقه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد روستا	۱۱۰	۸۲	۶۶	۵۲	۲۳	۶۸	۱۱۰	۹۰	۱۷۰
جمعیت متوسط	۴۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۱۰۰	۱۹۰۰	۶۰۰	۴۵۰	۳۸۰	۳۰۰
$S_h$	۵۰۰	۹۰۰	۹۲۰	۱۱۶۰	۱۹۵۰	۵۰۰	۷۸۰	۵۰۰	۵۰۰

۵. در نمونه‌گیری با احتمال متغیر روش خرد کردن را با ذکر مثال توضیح دهید. (۱ نمره)