

استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۱. اگر  $\hat{\theta}$  یک برآوردکننده ناریب برای  $\theta$  باشد آنگاه  $MSE(\hat{\theta})$  برابر است با:

الف.  $\text{var}^2(\hat{\theta}) + B^2$  ب.  $\text{var}(\hat{\theta}) + B^2$  ج.  $\text{var}(\hat{\theta}) + B$  د.  $\text{var}(\hat{\theta})$

۲. اگر برای یک جامعه ضریب تغییرات  $C(y) = 0.2$  آنگاه برای نمونه به حجم  $n = 100$  مقدار  $C(\bar{y}_n)$  چقدر می باشد؟

الف. ۲ ب. ۰/۲ ج. ۰/۰۲ د. ۰/۰۰۲

۳. به چند طریق می توان از یک جامعه ۱۲ عضوی یک نمونه ۵ تایی استخراج کرد؟

الف. ۵۴۱ ب. ۷۹۲ ج. ۴۷۱ د. ۱۱۳۵

۴. از جامعه به حجم  $N = 101$  نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم  $n$  انتخاب می کنیم. اگر  $y_i$  و  $y_j$  دو واحد

مشخص متوالی از این نمونه باشند به شرط آنکه واریانس جامعه  $\sigma^2 = 16$  باشد مقدار  $\text{COV}(y_i, y_j)$  چقدر است؟

الف.  $-0.16$  ب.  $1/6$  ج.  $-0.4$  د.  $0.4$

۵. از یک جامعه به حجم  $N = 100$  یک نمونه  $n = 10$  تایی استخراج شده است و مقدار  $\bar{y}_n = 14$  بدست آمده است. اگر

مقدار ضریب تغییرات جامعه  $S^2 = 41$  باشد مقدار واریانس  $\text{var}(\hat{t}_n)$  چه مقداری می باشد؟

الف. ۳۶۹۰۰ ب. ۱۹۲ ج. ۱۶۰۰ د. ۴۰

۶. در یک دانشکده با حجم  $N = 1400$  نفر دانشجو نمونه ای تصادفی به حجم  $n = 12$  استخراج شده و مشخص شده است

که در بین آنها ۳ نفر دارای خودروی شخصی است. برآورد تعداد دانشجویانی که در این دانشکده دارای خودروی شخصی هستند چقدر است؟

الف. ۷۰۰ ب. ۳۵۰ ج. ۱۵۰ د. ۱۲۰۰

۷. در سؤال قبل اگر مقدار  $fpc$  قابل اغماض باشد (چون  $0.0008 = \frac{12}{1400}$  خیلی کوچک است) واریانس برآوردکننده تعداد

دانشجویان دارای خودروی شخصی چقدر است؟

الف. ۱۹۸۵ ب. ۴۸۵۰ ج. ۳۷۸۰۰ د. ۳۳۴۰۹

۸. قرار است برای برآورد متوسط قطر درختان یک ناحیه جنگلی نمونه گیری تصادفی انجام شود. مقدار  $S^2$  یک نمونه مقدماتی

برابر ۳۰۰ شده است. واحد اندازه گیری سانتیمتر است. اگر بخواهیم فاصله اطمینان میانگین قطر درختان با ضریب

اطمینان ۰/۹۵ برابر ۴ سانتیمتر و مایل باشیم کسر نمونه گیری  $\frac{5}{100}$  باشد، حجم نمونه ای را که قرار است تهیه کنند چقدر باید

انتخاب کرد؟ ( $t_{0.975} \approx 2$ )

الف. ۲۵۰ ب. ۱۲۵ ج. ۱۴۳ د. ۲۸۵

۹. در یک نمونه  $n = 100$  تایی از خانواده های هر یک شهر  $a = 60$  خانواده مخالف خصوصی کردن دانشگاهها می باشند. حد پایین یک فاصله اطمینان  $95\%$  برای نسبت خانواده هایی که مخالف خصوصی کردن دانشگاهها هستند چقدر است؟  
 $(Z_{0.975} = 1.96)$

الف.  $0.419$  ب.  $0.503$  ج.  $0.497$  د.  $0.591$

۱۰. از جامعه ای متناهی نمونه ای تصادفی به حجم  $n$  استخراج می کنیم. مجدداً از این نمونه زیر نمونه ای به حجم  $n_1$  به تصادف انتخاب می کنیم. میانگین نمونه  $\bar{y}$  را و میانگین زیر نمونه را  $\bar{y}_1$  می نامیم. اگر  $\bar{y}_m$  میانگین واحدهای باقی مانده از نمونه پس از استخراج زیر نمونه باشد آنگاه  $\text{var}(\bar{y}_1 - \bar{y}_m)$  برابر است با:

الف.  $(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n})S^2$  ب.  $(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n})S^2$  ج.  $(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n})S^2$  د.  $(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n})S^2$

۱۱. در سؤال قبل مقدار  $\text{cov}(\bar{y}, \bar{y}_1 - \bar{y})$  چقدر می باشد؟

الف.  $\frac{1}{n_1}$  ب.  $\frac{1}{n}$  ج.  $\frac{1}{n_1}$  د.  $0$

۱۲. در یک مدرسه راهنمایی تعداد  $350$  دانش آموز سال اول  $400$  دانش آموز سال دوم و  $250$  نفر دانش آموز سال سوم هستند. از این سه طبقه نمونه هایی به ترتیب به حجم  $20, 30, 25$  دانش آموز بطور تصادفی انتخاب شده و اندازه قد آنها اندازه گرفته شده است. اگر میانگین سه نمونه به ترتیب  $\bar{y}_1 = 135, \bar{y}_2 = 145, \bar{y}_3 = 160$  باشد برآورد میانگین قد دانش آموزان این مدرسه چقدر خواهد بود؟

الف.  $145/25$  ب.  $117/5$  ج.  $150/25$  د.  $160/75$

۱۳. در سؤال قبل اگر برای سه طبقه داشته باشید  $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = 16$  مقدار واریانس برآوردکننده میانگین قد دانش آموزان چقدر است؟

الف.  $0.111$  ب.  $0.208$  ج.  $0.145$  د.  $0.75$

۱۴. در نمونه گیری طبقه بندی اگر  $\frac{1}{N_h}$  قابل اغماض باشد، کدام رابطه برقرار است؟

الف.  $V_{opt} \leq V_{ran} \leq V_{Prop}$  ب.  $V_{opt} \leq V_{Prop} \leq V_{ran}$  ج.  $V_{Prop} \leq V_{ran} \leq V_{opt}$  د.  $V_{Prop} \leq V_{opt} \leq V_{ran}$

۱۵. جمعیت سه شهر کوچک به ترتیب  $N_1 = 40000, N_2 = 20000, N_3 = 30000$  نفر است. می خواهیم برای بررسی مشخصه ای در این سه شهر نمونه هایی تصادفی با طبقه بندی شامل  $400$  واحد انتخاب کنیم. از روی سرشماری های گذشته داریم  $S_1 = 20, S_2 = 12, S_3 = 14$  حجم نمونه ای که باید از شهر اول انتخاب کنیم چقدر است وقتی که تخمین متناسب با حجم است؟

الف.  $n_1 = 175$  ب.  $n_1 = 178$  ج.  $n_1 = 150$  د.  $n_1 = 100$

۱۶. در سؤال قبل حجم نمونه ای که باید برای شهرهای دوم و سوم انتخاب کرد چقدر است؟

الف.  $n_p = 110$       ب.  $n_p = 120$       ج.  $n_p = 89$       د.  $n_p = 100$   
 الف.  $n_p = 115$       ب.  $n_p = 103$       ج.  $n_p = 134$       د.  $n_p = 200$

۱۷. مؤسسه تحقیقاتی برای تعیین متوسط مدت زمانی که بیماران مبتلا به دیابت در بیمارستانهای شهری بستری می شوند

تعداد بیماران را که در یک سال در سه بیمارستان شهر بستری بوده اند را در نظر می گیرد این تعداد به ترتیب ۳۰۰،

۱۲۰، ۱۸۰ می باشد. از روی نمونه گیری مقدماتی در هر بیمارستان واریانس تعداد روزهای بستری بودن بیماران

تقریباً  $\frac{299}{3}$ ،  $\frac{238}{15}$ ،  $\frac{179}{5}$  بدست آمده است. هزینه کسب اطلاعات درباره هر بیمار به ترتیب ۹، ۴ و ۱۶ می باشد.

مقدار  $S_1^2$ ،  $S_2^2$  و  $S_3^2$  برای هر سه بیمارستان چقدر است؟

الف.  $S_1^2 = 110$       ب.  $S_1^2 = 15$       ج.  $S_1^2 = 100$       د.  $S_1^2 = 18$   
 الف.  $S_2^2 = 100$       ب.  $S_2^2 = 17$       ج.  $S_2^2 = 16$       د.  $S_2^2 = 110$   
 الف.  $S_3^2 = 80$       ب.  $S_3^2 = 24$       ج.  $S_3^2 = 36$       د.  $S_3^2 = 36$

۱۸. در سؤال قبل اگر بخواهیم کلاً  $n$  فرد از سه بیمارستان را به عنوان نمونه انتخاب کنیم با استفاده از تخصیص ایتیم از هر

بیمارستان چه سهمی انتخاب می شود؟

الف.  $n_p = 0.20n$       ب.  $n_p = 0.082n$       ج.  $n_p = 0.12n$       د.  $n_p = 0.3n$   
 الف.  $n_p = 0.15n$       ب.  $n_p = 0.78n$       ج.  $n_p = 0.25n$       د.  $n_p = 0.1n$   
 الف.  $n_p = 0.6n$       ب.  $n_p = 0.138n$       ج.  $n_p = 0.63n$       د.  $n_p = 0.6n$

۱۹. در جامعه ای که ۵۰ واحد دارد نمونه ای به حجم ۸ با احتمال متغیر به تصادف و با جایگذاری انتخاب شده است. مقادیر

واحدها و احتمال های متناظر آنها در جدول زیر آمده اند.

$y_i$	۱۵۰	۱۵۴	۱۶۵	۱۶۲	۱۷۰	۱۷۵	۱۷۲	۱۷۰
$P_i$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{90}$

برآورد نااریب میانگین جامعه چقدر است؟

الف. ۲۱۱      ب. ۱۹۴      ج. ۱۲۸      د. ۱۵۴

۲۰. در سؤال قبل برآورد نااریب واریانس برآوردکننده میانگین جامعه  $y_i$  ها را بیابید.

الف. ۱۷۰      ب. ۹۹/۹۸      ج. ۱۹۴/۱۰      د. ۲۲۵

«سوالات تشریحی»

۱. اگر  $S^2$  ضریب تغییرات یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم  $n$  از جامعه‌ای به حجم  $N$  باشد، نشان دهید که  $S^2$  برآوردکننده نااریب  $\sigma^2$  ی جامعه است.

۲. اگر  $(X, Y)$  یک زوج متغیر تصادفی باشند و نمونه تصادفی ساده‌ای به حجم  $n$  از جامعه  $(X, Y)$  که به حجم  $N$  است انتخاب کنیم و اگر  $\bar{X}_n, \bar{Y}_n$  میانگین‌های نمونه‌ای  $Y, X$  باشند ثابت کنید که:

$$\text{cov}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = E(\bar{y}_n - \bar{Y}_N)(\bar{x}_n - \bar{X}_n) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) S_{xy}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum (X_i - \bar{x}_n)(Y_i - \bar{y}_N) \quad \text{جایی که}$$

۳. تعداد دانشجویانی که درمؤسسات آموزشی عالی تهران تحصیل می‌کنند و اجاره مسکن می‌پردازند ۴۵۰۰۰ است. می‌خواهیم میانگین اجاره مسکنی که می‌پردازند را برآورد کنیم. مایلیم با احتمال ۰/۹۵ قدر مطلق تفاضل برآورد و میانگین واقعی اجاره مسکن ۰/۰۰۴ میانگین واقعی کمتر باشد. برای تأمین این منظور نمونه لازم باید با چه حجمی انتخاب شود؟  
 $(Z_{0/05} = 1/645, \quad Z_{0/05} = 1/96)$

۴. از دفاتر ثبت سابقه ۴ بیمارستان تعداد کل افرادی که گروه خونی آنها معین شده است. به ترتیب ۱۵۰۰، ۱۲۰۰، ۸۰۰ و ۱۳۰۰ می باشد از این ۴ دفتر به تصادف ۵۰، ۶۰، ۳۰، ۶۰ نفر را انتخاب می‌کنند. از همان دفاتر دریافتی اند که ۱۸، ۱۰، ۲۲، ۲۰ نفر دارای گروه خونی A هستند.

الف. برآورد نااریب برای نسبت افرادی که در کل جامعه مراجعه‌کنندگان دارای گروه خونی A هستند بیابید و تعداد این افراد را برآورد کنید.

ب. برآورد واریانس این نسبت را تعیین کنید.

۵. فرض کنید در جامعه‌ای به حجم ۱۲ نمونه‌ای تصادفی با احتمال متغیر بدون جایگذاری انتخاب کرده‌ایم. جدول زیر معرف مقادیر واحدهای منتخب و احتمالهای متناظر با هر کدام است. حجم نمونه ۵ است.

$y_i$	۱۰	۱۱	۸	۱۳	۱۸
احتمال	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{29}$	$\frac{1}{12}$

میانگین جامعه را برآورد کنید و برآورد واریانس این برآوردکننده را بیابید.